



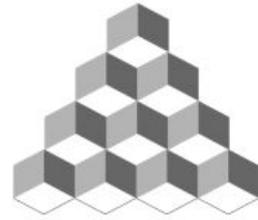
## Problema da Borda Semana 1 – Dias 1 e 2

### Introdução

Eu (Jo Boaler) ouvi falar desse problema pela primeira vez com Cathy Humphreys, professora incrível que discute a aula em nosso livro: *Connecting Mathematical Ideas*. Eu gosto muito dessa atividade como primeira introdução à álgebra, pois os alunos precisam usar expressões algébricas para descrever a borda de um quadrado. Os alunos da turma vão descrever o crescimento da borda de formas diferentes, depois vão escrever sobre seu crescimento e, por fim, poderão ser auxiliados a usar variáveis para criar expressões algébricas diferentes. À medida que os alunos forem descrevendo o crescimento do quadrado de formas diferentes, haverá muitas expressões algébricas diferentes e os professores podem apontar que todas elas são equivalentes. É importante ressaltar que cada expressão algébrica virá a partir de um padrão visual, que os alunos podem ver e entender.

### Programa do dia

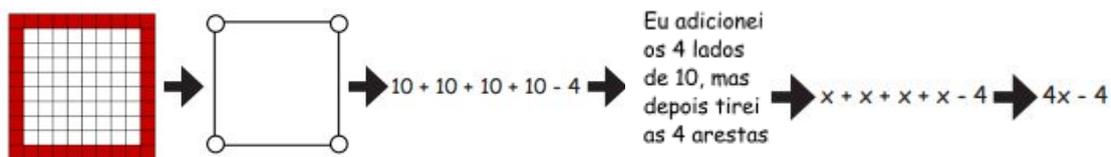
Atividade	Tempo	Descrição/Pontos	Materiais
Conversa Numérica sobre a Borda de 10 x 10	15 min	Quantos quadrados estão na borda de uma grade de 10 x 10? <ul style="list-style-type: none"> <li>● Mostre rapidamente a imagem do quadrado de 10 x 10 com a borda vermelha para que os alunos não consigam contar os quadrados.</li> <li>● Não copie isso para os alunos, pois eles depois vão contar os quadrados.</li> <li>● Quantos quadrados tem a borda de uma grade de 10 x 10?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Cópia da imagem do problema da borda 10 x 10 para exibição à turma.</li> </ul>
Encolha a Grade	30 min	Escolher uma estratégia para usá-la numa grade menor.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Cartolina</li> </ul>
Instruções para qualquer Grade	15 min	Escrever uma descrição da estratégia para descobrir quantos quadrados estão na borda de uma grade de qualquer tamanho.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Papel/caderno</li> <li>● Lápis ou caneta</li> </ul>
A Essência da Álgebra	20 min	Traduzir descrições escritas para expressões algébricas.	



### Ao Professor

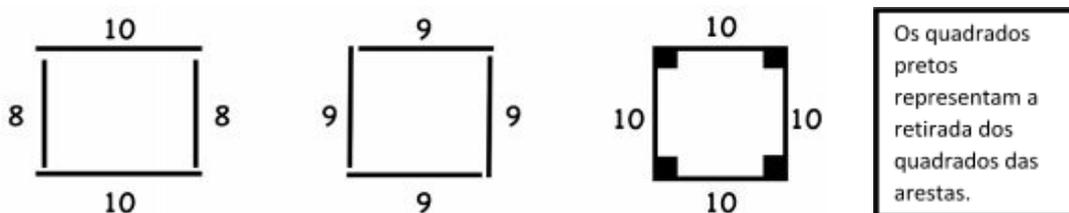
Nós usamos esta atividade em nosso curso de férias

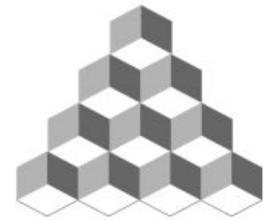
(<https://www.youcubed.org/pt-br/resources/o-problema-das-bordas-video/>) para apresentar a álgebra aos alunos. Nesta atividade, começamos com a reflexão sobre a borda de uma grade de 10 x 10, depois passamos para um diagrama da borda de uma grade de qualquer tamanho, depois para uma expressão escrita a uma expressão algébrica, e então para a reescrita de expressões algébricas equivalentes. Eis uma representação visual que ilustra este processo.



### Lançar

Comece projetando uma grade de 10 x 10 como a da página 8. Consideramos essa primeira parte uma conversa numérica. Quando exibimos a grade, damos aos alunos tempo para pensar, do mesmo jeito que fazemos numa conversa numérica. Nós apenas mostramos a imagem por alguns segundos para que eles não contem os quadrados. Também avisamos que não os contem. Perguntamos quantos quadrados haveria na borda dessa grade de 10 x 10. No começo, pedimos que algum aluno mostre suas respostas, depois tentamos ouvir outras respostas. Escrevemos todas as respostas diferentes no quadro sem dar qualquer indicação de erro ou acerto. Geralmente coletamos cinco ou mais respostas possíveis. Em seguida, pedimos aos alunos que mostrem sua forma de ver a borda e sua estratégia para descobrir o número de quadrados na borda de uma grade 10 x 10. Registramos cada estratégia compartilhada no quadro branco com uma identificação visual e uma expressão numérica. Eis algumas das representações que ilustramos.

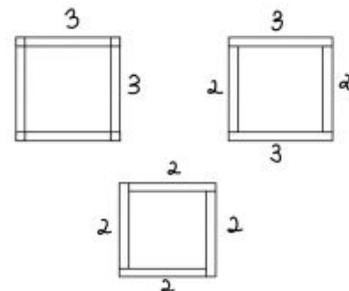




Caso várias estratégias não sejam mencionadas, nós oferecemos estratégias adicionais dizendo que as vimos em outra turma. Isso oferece aos alunos mais estratégias para reflexão e compreensão. Cada estratégia que registramos no quadro é acompanhada pelo nome dos alunos para mostrar que, a partir de então, um determinado método lhe pertence.

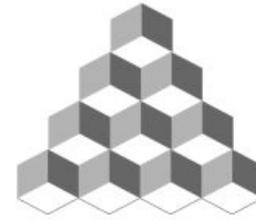
Após discutirmos as estratégias, nós pedimos aos alunos que aplicassem uma estratégia de sua escolha numa grade de 6 x 6. Pedimos que preparassem um cartaz de sua solução, o que inclui uma representação visual e numérica. Quando os alunos haviam finalizado seus cartazes de 6 x 6, solicitamos que os colocassem na parede e circulassem pela sala, conferindo os outros trabalhos. Em seguida, nós discutimos os diferentes métodos que os grupos usaram e as diferentes representações visuais que foram apresentadas. Celebramos o fato de que nenhum cartaz se parecia com os outros. Este é um sinal claro de que a criatividade na matemática funciona.

Este foi o fim da primeira parte da aula sobre o problema da borda. Começamos a parte seguinte promovendo uma conversa numérica sobre uma grade de 3 x 3. Pedimos aos alunos que mostrassem seu método, não a resposta. Desenhamos representações precisas de seu método no quadro e depois esperamos pra ver o que aconteceria. Ficamos impressionados com a compreensão que



eles tiveram, bem como os erros que ainda estavam cometendo. Aqui estão as respostas que a turma ofereceu para um quadrado de 3 x 3. O primeiro aluno disse, 'multiplica 3 x 3 e subtrai quatro'. A segunda representação mostrou que a aluna havia esquecido algumas arestas quando disse '3 + 3 + 2 + 2'. A última representação era a correta! Pedimos aos alunos que determinassem a resposta numérica para cada representação descrita. Isso foi acompanhado por uma conversa sobre o que estava errado nas representações, uma vez que todos os três métodos tinham uma resposta diferente. Perguntamos a eles: "este é um problema que tem uma única resposta certa, ou várias respostas certas?".

Nosso próximo passo foi pedir que cada equipe escrevesse uma descrição de como usar uma das estratégias em uma grade de qualquer tamanho. Depois, pedimos que um aluno de cada grupo escrevesse as descrições da equipe no quadro. Em seguida



nós demos a descrição de um grupo para outro grupo e pedimos que verificassem as orientações, encontrando a resposta para qualquer quadrado que quisessem. Dessa forma, nós tínhamos a versão anterior para consultar, pois sempre evitamos apagar trabalho. Os erros são importantes e nós os celebramos. Isso foi acompanhado por outra discussão em sala.

Eis o exemplo de uma descrição que foi revisada.

#4

Multiplique a base e a altura do quadrado. Além disso, pois estamos tentando não contar os quadrados pequenos em cada uma das quatro extremidades do quadrado, você precisa subtrair o resultado por 4.

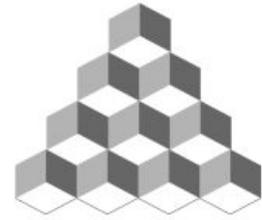
Multiplique a base ou a altura do quadrado por 4. Em seguida, subtraia 4 porque não podemos contar as arestas duas vezes (seu método funciona apenas para  $4 \times 4$ )

1º Rascunho

2º Rascunho

Nosso movimento final foi o de apresentar variáveis dizendo que, em vez de escrever a descrição em palavras, nós podemos usar variáveis para escrever uma descrição algébrica. Essa é uma forma de descrever o que você está fazendo de forma mais eficiente. Informamos aos alunos que uma variável pode ser uma letra,  $j$ , ou, os mais convencionais  $x$  e  $y$ . Qual dessas letras será escolhida é irrelevante. Depois, pedimos aos alunos que mostrassem ideias sobre como eles escreveriam a descrição usando variáveis. Isso foi um desafio pra eles e precisamos dar bastante tempo de espera. Ficamos surpresos com o número de alunos focados na resposta numérica. Um segundo desafio foi o de tentar ajudá-los a entender que essas palavras que eles estavam usando para descrever os comprimentos laterais poderiam ser expressadas com a mesma variável.

Começamos com o método que soma o comprimento total de parte superior e inferior, e então subtrai as duas arestas dos dois lados verticais para não contá-las duas vezes. Perguntamos como poderíamos chamar a parte superior e a parte inferior e um aluno sugeriu ' $x$ '. Chamamos a parte superior e inferior no diagrama de  $x$ . Depois, perguntamos como poderíamos chamar os lados verticais cujas duas arestas foram subtraídas. Um aluno disse ' $y$ '. Nós respondemos que isso poderia ser escrito assim,

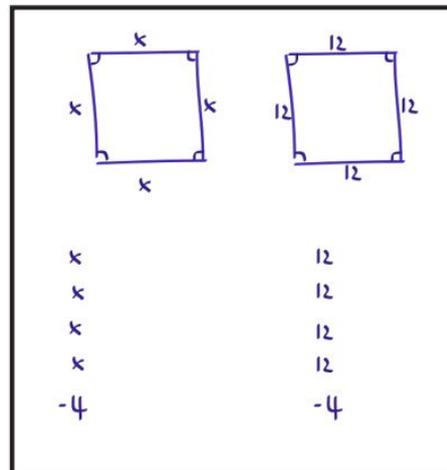
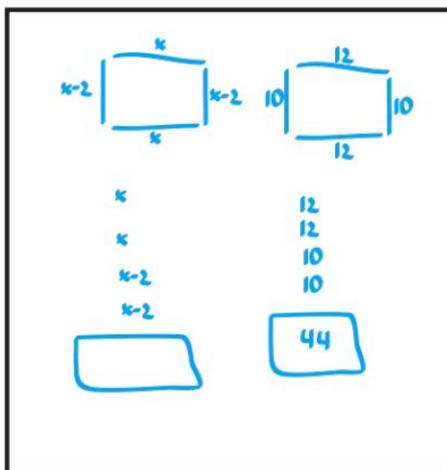


mas queríamos tentar escrever a descrição com o mínimo de variáveis possível. Perguntamos se eles conseguiriam pensar numa forma de escrever o comprimento vertical menos as duas arestas em termos de  $x$ . Outro aluno sugeriu ' $x-2$ '. Nós identificamos ambas as alturas verticais de ' $x-2$ '. Depois, perguntamos o que devemos fazer com esses comprimentos. Escrevemos a expressão sob o exemplo para que os alunos pudessem resolver o quadrado  $12 \times 12$ . Em seguida, usamos outro método ( $x(4) - 4$ ).

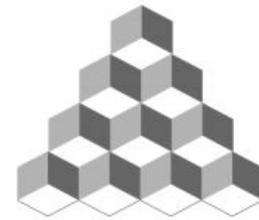
Reconhecemos que essa nova forma de pensar sobre o problema era nova e difícil. Nós descrevemos para os alunos que o que eles estiveram fazendo foram melhoramentos e expansões com base no raciocínio de outras pessoas. Nós chamamos isso de um tipo de '*design thinking*' (pensamento de design), muito usado no Vale do Silício. Alguém sugere uma ideia e os outros revisam e expandem essa ideia. Informamos que esse é um aspecto importante do que fazemos nessa aula de matemática.

Em seguida, direcionamos a conversa à reescrita de expressões equivalentes perguntando: " $4x - 4$  é a mesma coisa ou é diferente de  $x+x+(x-2)+(x-2)$ "?

Começamos organizando a informação para os alunos da seguinte maneira no quadro para os dois métodos diferentes.



Perguntamos aos alunos, o que aconteceria se somássemos as variáveis do método 1 e o que aconteceria se somássemos as variáveis do método 2. Informamos que talvez não saibam como fazer isso, mas não custa nada tentar. 'Lembrem, se vocês tentarem e errarem, isso significa que mais sinapses estão sendo disparadas!'. Antes de

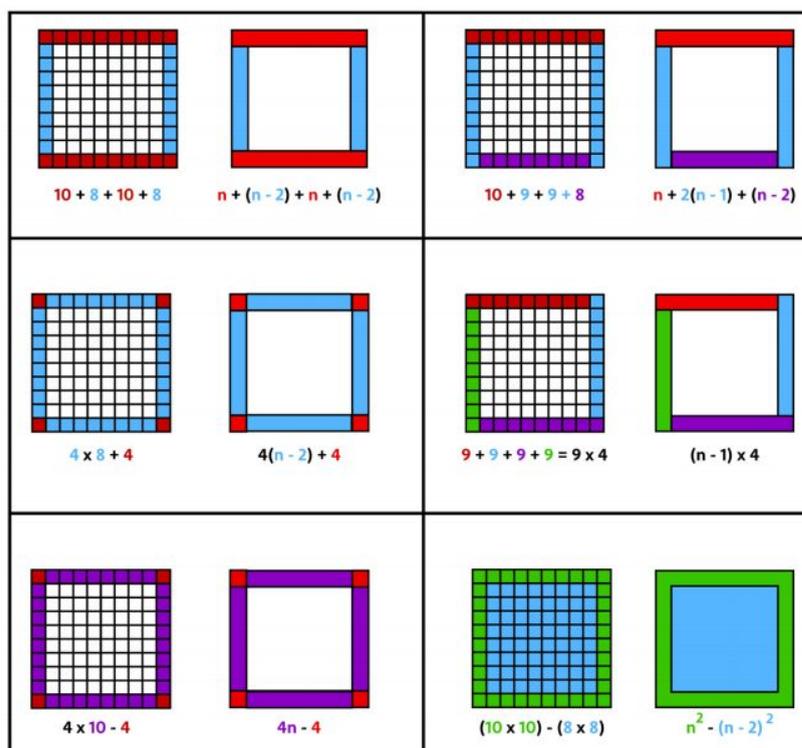


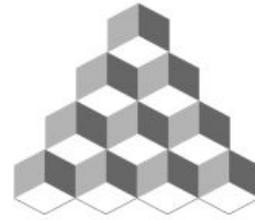
começar, um aluno perguntou o que era 'x'. Ele queria saber que número era esse. Nós avisamos que a variável poderia representar qualquer número. Pedimos aos alunos que escrevessem o que 'x' estava representando em palavras, em seus cadernos.

Mensagem de Mentalidade de Crescimento: 'Adoramos mostrar a vocês uma ideia de difícil resolução. Lembrem que, quanto mais dificuldade sentem com uma ideia, mais seu cérebro vai crescer. Nós poderíamos passar coisas nessa aula que todos vocês acertariam, mas isso não os ajudaria de verdade. Pode até dar uma sensação agradável, mas não ajudaria. O que vocês realmente devem fazer é lutar com as ideias'.

Após dar tempo aos alunos para que conversem com suas equipes, façam questionamentos e troquem ideias sobre nossa pergunta, pedimos que uma pessoa de cada grupo contasse o que o grupo discutiu. Ao longo da discussão, chegamos ao ponto em que os alunos estavam convencidos de que todas as diferentes expressões podem ser escritas como  $4x-4$ .

Eis aqui uma representação visual das diferentes soluções que vimos. Não recomendamos que você mostre isso aos alunos. Deixe-os formarem suas soluções.





Fontes Extras:

BOALER, J.; HUMPHREYS, C. *Connecting mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching & learning*. Heinemann Educational Books, 2005.

**Extensões para atividade:**

- Esboce um diagrama e use a expressão algébrica para encontrar o número de quadrados na borda de uma grade de 75 x 75.
- Dê às equipes outro padrão geométrico para que pensem sobre como o veem, como a forma muda quando as dimensões mudam, e representar o que veem algebricamente.

realização:



apoio:



