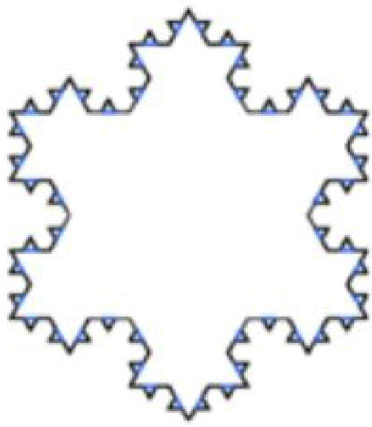
Investigando um floco de neve

Adaptado de *MT 1810 Calculus II Unit* do Departamento de Matemática da Universidade de Rockhusrt, Mairead Greene & Paula Shorter.

Objetivo:
Investigar a construção e a área de uma forma particular de floco de neve.

Introdução:
Na matemática, nós muitas vezes estamos interessados em descrever as características das formas – seja do perímetro (comprimento), área ou volume. Nesta atividade, nós vamos investigar algumas dessas características da forma de um "floco de neve matemático", definido por meio do uso de um processo recursivo (processo que repete as mesmas etapas sucessivamente). Um processo recursivo é geralmente fácil de fazer à mão quando não há muitas etapas, mas, à medida que elas aumentam, o trabalho manual fica mais dificultoso. Os processos recursivos podem criar objetos matemáticos bastante complexos que nós queremos entender bem. Estudamos esses objetos definidos recursivamente de duas formas: (1) usando o computador para nos ajudar a conduzir muitas etapas do processo, e (2) percebendo no processo padrões que podemos aproveitar e usar para estudar o objeto analiticamente.



Parte 1. Construindo Flocos de Neve – Um Processo Recursivo

Começamos nosso processo recursivo de construção com um triângulo equilátero (suponha que seus lados tenham 30 centímetros de comprimento). Este triângulo é nosso "floco de neve" inicial. Cada estágio no processo recursivo é chamado de iteração. O triângulo é a iteração zero, que nós identificamos n = 0. Conduza a iteração seguinte (diretamente no triângulo) para criar o Floco de Neve n = 1 por meio da alteração de cada segmento de linha do perímetro do triângulo do seguinte modo:

realização: Instituto Sidarta apoio: Itaú Social

Investigando um floco de neve

a) Divida o segmento de linha em três segmentos de comprimentos iguais.
b) Desenhe um triângulo equilátero que tenha o segmento médio da etapa (a) como base e aponte para fora.
c) Remova o segmento de linha que é a base do triângulo da etapa (b).

Quando você tiver terminado os Passos (a) – (c) acima para cada linha do perímetro, terá criado um Floco de Neve n = 1, a primeira iteração do processo recursivo.

Parte 2. Características da Forma – Área:

(1) Agora que você construiu dois flocos de neve – o triângulo original (Floco de Neve n = 0) e a primeira iteração (Floco de Neve n = 1), nós vamos investigar a área desses flocos de neve. Calcule as áreas desses dois primeiros "flocos de neve".

(2) Repita as etapas (a) – (c) na Parte (1) para cada segmento de linha do perímetro do Floco de Neve n = 1. Uma vez concluído, você terá criado o Floco de Neve n = 2, a segunda iteração do processo recursivo. Calcule a área do Floco de neve n = 2.

(3) Nós agora terminamos dois estágios (i. e., iterações) do processo recursivo e você criou dois novos flocos de neve no processo. Poderíamos usar o mesmo processo para criar muitos outros flocos de neve (observe o seu último floco de neve e reflita sobre como você criaria o próximo). Nós estamos identificando cada floco de neve pelo seu número de iteração – i.e., quantas vezes, n, nós temos conduzido o processo (etapas a-c na parte 1). Estamos agora interessados em prever a área do próximo floco de neve (Floco de Neve = 3). Os flocos de neve já se tornaram bastante complicados, então, em vez de calcular essa área à mão, reflita sobre os cálculos que você fez nas duas primeiras iterações. Você consegue identificar quaisquer padrões do seu trabalho nas partes (2) e (3) acima que nos ajude com essa previsão? Escreva todos os padrões que encontrar e esteja a postos para mostrá-los à turma.

Investigando um floco de neve

(4) Discussão da turma: Que padrões vocês encontraram que podem ser úteis para o cálculo da área de cada novo floco de neve a partir de sua iteração anterior?

(5) Preveja a área que vamos acrescentar ao Floco de neve n = 2 para obter o Floco de neve n=3. Qual a área total do Floco de Neve n = 3?

(6) Escreva uma fórmula para a área que nós acrescentamos à iteração de número n do processo recursivo (quando estiverem construindo o Floco de Neve n).

(7) Verifique sua fórmula nas três primeiras iterações do processo recursivo. Depois, use-a para ajudá-lo a calcular a área total da quarta iteração (Floco de Neve n = 4)

(8) Expresse a área total do Floco de Neve n = 4 como a soma de 5 termos. (Dica: O primeiro termo deve ser a área do triângulo equilátero original)

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{k=1}^{5} 2k^2 = 2 \bullet 1^2 + 2 \bullet 2^2 + 2 \bullet 3^2 + 2 \bullet 4^2 + 2 \bullet 5^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{3} k(k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{3^k}{2} =$$

Parte 3. Explorando as Características do Floco de Neve de Koch

Esta atividade permite mais investigações sobre as características do Floco de Neve de Koch, com oportunidade para considerar somas finitas e os limites das somas finitas (séries), aproximação de limite exato com as somas finitas, e algumas considerações de erros.

realização: Instituto Sidarta   apoio: Itaú Social

Investigando um floco de neve

Pratique com a Notação Sigma:

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{k=1}^{5} 2k^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{3} k(k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{3^k}{2} =$$

Escreva as somas a seguir usando a notação sigma:

$$3 + 6 + 9 + 12 = \sum$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \sum$$

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} = \sum$$

O Desmos tem um somatório sigma no teclado numérico (canto inferior esquerdo) embaixo do botão das Funções na parte inferior da aba Misc. Use isso para verificar se você escreveu as somas acima corretamente na notação sigma.

realização: Instituto Sidarta
apoio: Itaú Social

Investigando um floco de neve

O Floco de Neve de Koch

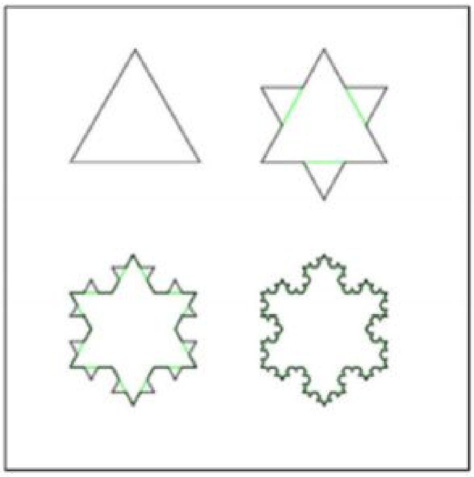
Os objetos que você tem construído recursivamente são chamados de Flocos de Neve de Koch, em homenagem ao matemático sueco que os estudou primeiro, Niels Fabian Helge Koch (1870 – 1924). O triângulo inicial e as primeiras três iterações do floco de neve são mostradas na figura abaixo à esquerda. Essas formas matemáticas são estágios que levam à curva de Koch, uma das primeiras curvas fractais a serem descritas. Se o processo recursivo pelo qual você passou na Parte I desta atividade fosse conduzido ao infinito, o objeto resultante seria a curva de Koch. Uma seção da curva de Koch é mostrada abaixo, à direita. Quando ampliada, ela tem uma autossimilaridade de repetição infinita (esta característica é um traço de todos os fractais).

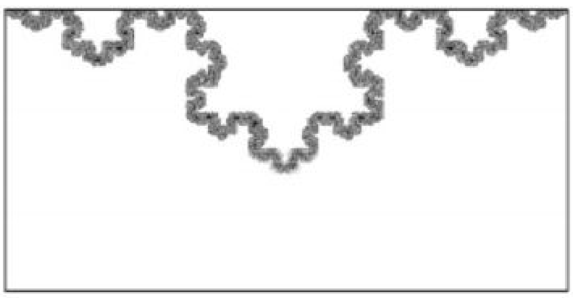
1. Escreva uma expressão para a área de um Floco de Neve n = 4 usando uma notação sigma. Com o Desmos, verifique essa expressão contra a área que você já descobriu para o Floco de Neve n = 4 na última atividade.

2. Calcule a área do Floco de Neve n = 20.

3. Use os padrões que você reconheceu na Parte I desta atividade para escrever uma fórmula para a área do Floco de Neve de Koch de número n usando a notação sigma:

A(n) =





Investigando um floco de neve

Discussão com a turma:

Como descrevemos acima, a curva de Koch é o limite de um processo recursivo infinito – no qual em cada iteração, uma área adicional é acrescentada ao floco de neve anterior. Você acha que a área delimitada pela curva de Koch é finita ou infinita? Explique seu raciocínio e esteja a postos mostrá-lo à turma.

4. Investigação com Desmos: Com a ajuda do Desmos, nós vamos numericamente investigar se a curva de Koch delimita uma quantidade de área finita ou infinita. Agora que você desenvolveu uma fórmula para a área do Floco de Neve de Koch de número n, você pode usar um computador para facilmente calcular a área de qualquer floco de neve de Koch.

Calcule várias áreas para investigar a pergunta feita anteriormente: A área delimitada pela curva de Koch é finita ou infinita? Quando houver terminado sua investigação no Desmos, estabeleça sua conjectura abaixo e responda às perguntas a seguir.

a) Conjectura:

b) Explique como os seus resultados no Desmos sustentam a sua conjectura:

c) Caso você já tenha conjecturado que a área delimitada pela curva de Koch é finita, dê um valor estimado para a área exata delimitada pela curva de Koch. O que você fez para obter essa estimativa?

5. Discussão com a Turma: A Área Exata Delimitada pela Curva de Koch. Você agora percebe que a área delimitada pela curva de

Investigando um floco de neve

Koch é uma série – a soma de um número infinito de termos. Cada série é definida como o valor limitante da sequência de somas parciais – aqui, as somas parciais são as áreas crescentes dos estágios de um Floco de Neve de Koch. Escreva a área delimitada pela curva de Koch usando uma série na notação sigma:

Área contida pela curva de Koch = ∑

6. Aproximações e Erro:

Use o Wolfram Alpha para calcular o valor exato da expressão acima representando a área delimitada pela curva de Koch. (Para ver um exemplo do uso do Wolfram Alpha para computar uma soma infinita, ver: https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+%283%2F4%29%5Ej%2C+j%3D0..infinity&lk=3

1. Na P5, você calculou as aproximações de soma parciais para a área exata delimitada pela curva de Koch – essas são as áreas de iterações do Floco de Neve de Koch. Use os Flocos de Neve de Koch n = 5, n = 10 e n = 50 como suas aproximações de soma parciais e, para cada aproximação, calcule o erro associado usando Desmos. (Erro = valor exato – aproximação)
2. Suponha que precisamos de uma aproximação de soma parcial para a área exata delimitada pela curva de Koch que está dentro de .00001 = $10^{?1}$ da área exata. Qual o menor n para o qual a área do Floco de Neve Koch de número n vai nos dar uma aproximação suficientemente precisa? Explique o seu raciocínio.

Discussão com toda a turma: O Que Aprendemos nesta Atividade?

Investigando um floco de neve

Perguntas de Extensão

1. Escreva uma fórmula para a área do 30º Floco de Neve de Koch (n = 30) usando a notação sigma.
2. Calcule a área do 30º Floco de neve de Koch (n = 30). (Você pode usar o Desmos)
3. Se nós usamos a área do 30º Floco de Neve de Koch como uma aproximação da área delimitada pela curva de Koch, qual o erro associado a essa aproximação? (Você pode usar o Desmos).