O que é a Beleza Matemática?

Ensinando Por Meio de Ideias fundamentais e Conexões

Jo Boaler, Professora de Educação Matemática, codiretora do Youcubed
Jen Munson, Doutoranda em Educação Matemática
Cathy Williams, codiretora do Youcubed
Universidade de Stanford

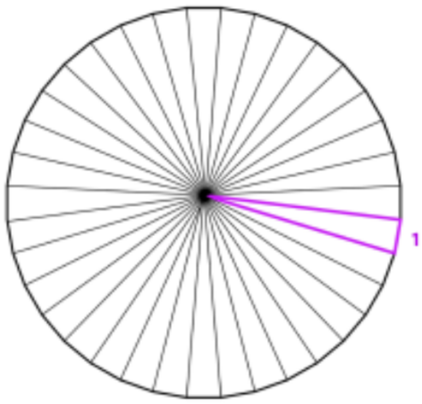
A matemática é uma bela matéria. Pergunte a matemáticos, e outros, o que os faz amá-la e eles falarão sobre as conexões incríveis que perpassam esse campo, unificando as diferentes ideias. Não há muitos fatos ou métodos a serem lembrados na matemática, mas existem algumas ideias realmente grandes e importantes que se conectam entre si e permeiam a matéria. No entanto, quando perguntamos aos alunos o que eles acham que a matemática é, a maioria dirá que é um monte de regras e métodos diferentes. Isso é realmente lamentável, pois os alunos que acreditam que a matemática é um conjunto de métodos a serem memorizados são os que apresentam pior desempenho, em todo o mundo, como revelaram os dados do PISA (BOALER; ZOLDO, 2016). Então, por que tão poucos alunos, ou professores, veem a matemática como um fecundo conjunto de conexões e ideias? Uma das razões é que os professores recebem conjuntos de padrões que devem ensinar e, independentemente do nível de competência dos redatores desses padrões, todos fatiam a matemática em pedacinhos, dando aos professores pequenas áreas atomizadas de conteúdo - muitas vezes, um conjunto de métodos - a serem ensinados. As conexões desaparecem - os professores não conseguem vê-las e elas se perdem das rotas de aprendizado dos alunos. Em vez disso, os professores veem as listas de conteúdo - geralmente com 100 ou mais métodos em um ano - e trabalham sistematicamente em cima delas. Isso muitas vezes os leva a abordar o conteúdo de forma rápida e superficialmente, pois, quando a matemática está desconectada e é oferecida em pequenas seções, há muita coisa a ser feita antes da conclusão de qualquer ano. As conexões entre as ideias ficam invisíveis e os alunos não desenvolvem uma das percepções mais importantes possíveis - de que a matemática é um conjunto de ideias fundamentais e conectadas.

> **A matemática é uma disciplina de conexões lindas, não uma lista longa de tópicos desconectados.**
>
> Jo Boaler

Um passo importante para ver as conexões matemáticas é conhecer as ideias fundamentais nessa matéria. Eu (Jo Boaler) estudei sistematicamente diferentes abordagens escolares em diferentes países, por muitos anos. Em dois estudos experimentais longitudinais com alunos que estavam aprendendo matemática nos últimos anos do ensino fundamental, e no ensino médio, em uma escola nos EUA, e outra no Reino Unido, acompanhei os alunos em diferentes métodos de ensino. Em ambos os casos, os alunos que alcançavam melhores desempenhos e que mais gostavam da matemática, haviam aprendido a matéria por meio de abordagens mais conceituais e os

> **Conversa da Cerca**
>
> Uma fazendeira quer fazer a maior área possível cercada com 36 componentes de cerca de um metro de comprimento. Qual a maior área possível da cerca?

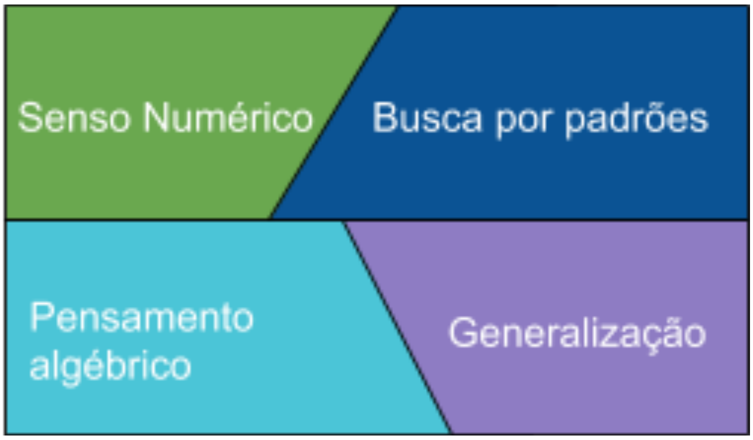
professores haviam planejado o ensino em torno das ideias fundamentais. No Reino Unido, os professores bem-sucedidos usavam uma abordagem baseada em projetos. Eles deliberavam as ideias fundamentais nos diferentes anos de matemática e, então, escolhiam projetos longos e abertos por meio dos quais os alunos encontrariam a necessidade para os diferentes métodos matemáticos. Eu acompanhei alunos de seus 13 anos até completarem 16, reunindo variadas formas de dados. Um dos projetos sobre o qual os alunos se debruçaram chamava-se “Interpretando o mundo”, nele, os alunos reuniam diferentes formas de dados sobre o mundo, que eles escolheram e analisaram. Outro projeto chamava-se “36 Cercas” – os alunos eram informados que uma fazendeira tinha 36 lados de uma cerca e queria maximizar a área cercada. Os alunos não receberam informações sobre métodos antes de precisar deles – por exemplo, quando trabalharam no projeto das 36 partes da cerca, alguns deles fizeram uma cerca de 36 lados e perceberam que conseguiam encontrar a área fazendo 36 triângulos com uma base de tamanho 1. Para encontrar a área de cada triângulo, os alunos precisaram de trigonometria e, assim, as professoras lhes ensinaram métodos trigonométricos quando eles toparam com a necessidade de usá-los, para resolver o problema no qual estavam trabalhando. Após três anos dessa abordagem, os alunos obtiveram resultados significativamente melhores nos exames nacionais de matemática comparados aos alunos que trabalharam sistematicamente com uma sequência de métodos em perguntas do livro didático. Estudos dos alunos seis anos depois mostraram que aqueles que aprenderam por meio de uma abordagem baseada em projetos acabaram alcançando empregos mais profissionais comparados aos alunos que haviam aprendido de modo tradicional, algo que eles atribuíram às formas como haviam aprendido matemática (ver BOALER; SELLING, 2007). https://www.youcubed.org/resources/psychological-imprisonment-intellectual-freedom-longitudinal-study-contrasting-school-mathematics-approaches-impact-adults-lives/



36 gonos

Nos Estados Unidos, estudei alunos em três diferentes escolas de ensino médio, com idades entre 14 e 18 anos. Na abordagem mais bem-sucedida, os professores haviam novamente planejado o ensino estabelecendo ideias fundamentais para cada ano e, então, organizado unidades e perguntas em torno delas. A abordagem era conceitual, mas não baseada em projetos - os alunos debruçavam-se sobre ideias fundamentais, tal como “O que é uma função?”, e encontravam diferentes perguntas, que eram discutidos em grupos. Ela destacava as conexões entre as ideias, através de métodos como a codificação por cores. Ambas as abordagens são descritas com maiores detalhes em outro lugar (acesse https://www.youcubed.org/resource/short-impact-papers/), mas, o que é importante perceber aqui é que, nos dois casos de ensino, os professores haviam estabelecido as ideias fundamentais na matemática e, depois, planejado atividades em torno delas.

Um terceiro caso de ensino que dá ênfase à importância das ideias fundamentais contou com a participação de duas autoras deste artigo, que eram as professoras – eu e Cathy Williams. Nós nos unimos a três outras professoras na gestão e ensino num curso de férias de 18 dias para alunos do ensino fundamental 2 em Stanford. Pela manhã, os alunos recebiam três horas de aula de matemática, e, à tarde, engajavam-se em atividades pelo campus. Quando os 81 alunos chegaram, todos eles disseram às entrevistadoras que não “levavam jeito para matemática”, apesar de pertencerem a diferentes níveis de rendimento. Antes de virem ao curso de férias, todos tinham feito uma prova de álgebra em seu distrito escolar, e nós lhe demos o mesmo teste ao fim de nossa experiência, 18 dias depois. Os alunos haviam melhorado uma média de 50%, o equivalente a 2,4 anos de escola. A melhora dos alunos foi atribuída a muitos fatores, incluindo a incorporação de conhecimentos da Neurociência em nosso ensino. Nós muitas vezes lhes dissemos que: essa coisa de levar jeito para matemática não existe, os cérebros crescem e mudam, os momentos de erros e dificuldades são os mais importantes para o crescimento do cérebro, e que aquela matemática tem como base a profundidade, e não a rapidez. Também apontamos que, quando encontramos a matemática em formas diferentes – visualmente, em palavras, números, algoritmos, tabelas, gráficos, entre outras formas, isso estimula as conexões e o desenvolvimento cerebral. (As diferentes descobertas da Neurociência que influenciaram nosso ensino são explicadas em: youcubed.org). Acima de tudo, nós havíamos planejado as atividades que escolhemos para as 18 aulas em torno de ideias fundamentais, e os alunos foram estimulados a fazer conexões entre essas ideias. A maioria dos alunos estava concluindo o sexto ano e nós escolhemos focar nosso ensino em torno destas ideias fundamentais:



Ideias fundamentais do Curso de Férias do Youcubed, 2015

Escolhemos, então, 24 atividades ricas e engajadoras com foco nessas ideias fundamentais; isso deu aos alunos muitas oportunidades de ver as conexões entre ideias que eram conceituais e engajadoras. (Para encontrar exemplos dos tipos de atividades que escolhemos, acesse: (https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/). Enquanto os alunos se debruçavam sobre as atividades focadas nessas ideias fundamentais, eles se depararam com a necessidade de muitos dos métodos menores e nós os ensinamos durante as atividades. A vantagem dessa abordagem de ensino para as ideias fundamentais, e o ensino de ideias menores à medida que vão surgindo, é que os alunos sempre querem aprender os métodos menores, pois precisam deles para resolver os problemas. Como exemplo disso, uma das atividades que nós escolhemos para ensinar senso numérico foi chamada de “Os 4 quatros”. Pediu-se que os alunos tentassem encontrar cada número de 1 a 20 usando exatamente 4 quatros e qualquer operação. Todos os números de 1 a 20 podem ser obtidos de 4 quatros, mas alguns deles precisam da operação fatorial (!). Com ela, você pode obter 24, pois 4! é 4 x 3 x 2 x 1. Nós não ensinamos a operação fatorial no começo da atividade, esperamos que os alunos percebessem que não conseguiriam encontrar alguns números sem ela. Isso tornou o aprendizado de fatorial muito empolgante e vários alunos o acharam superlegal!

Fatorial

$1! = 1 = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Pesquisas mostram que tal ensino de mecanismos em momentos nos quais os alunos se veem precisando deles mostrou-se o método mais eficaz de ensino de matemática (SCHWARTZ; BRANSFORD, 1998). Os alunos podem aprender por meio de atividades focadas em ideias fundamentais e, quando topam com a necessidade de um novo método, eles o aprendem dentro da atividade. Quando fazem isso, seus cérebros estão preparados para aprender o novo método, pois eles estão curiosos e precisam dele. Quando se ensina por meio das ideias fundamentais na matemática, a maioria das ideias e métodos menores surgem naturalmente e os alunos podem aprendê-los de maneiras significativas e intencionais. As ideias que nunca surgem provavelmente não são muito importantes para se aprender!

A escola na Inglaterra que eu pesquisei ensinava por meio de projetos longos e abertos de três anos e, nas últimas semanas que antecediam o exame nacional, ela revisava os testes com os alunos, ensinando quaisquer métodos que eles não houvessem encontrado ao longo de seus projetos. A escola nos EUA ensinava boa parte dos métodos padrões e não se preocupava com aqueles que não surgiam naturalmente em suas unidades de trabalho. Os alunos ainda obtinham resultados significativamente mais altos em comparação àqueles que trabalharam cada método de forma sistemática (BOALER, 2016).

Há muitos anos, os educadores matemáticos têm ressaltado a importância das ideias fundamentais. Em 1999, Deborah Schifter e seus colegas escreveram um artigo importante chamado “Teaching to the big Ideas” (Ensinando para as ideias fundamentais) e, em 2005, Randall Charles apresentou uma lista útil de ideias fundamentais matemática desde a alfabetização até o oitavo ano. (Os links para esses dois textos estão no apêndice). Jere Confrey e sua equipe na Universidade Estadual da Carolina do Norte também estabeleceram trajetórias de aprendizado da alfabetização ao oitavo ano que são muito compatíveis com as ideias fundamentais e mostram muito bem as conexões entre os anos (https://www.sudds.co/).

Em nosso trabalho com professores, em que destacamos a importância de ensinar para as ideias fundamentais e suas interconexões, eles frequentemente nos perguntam – quais são as ideias fundamentais? Muitos deles ensinavam matemática como uma lista de conteúdo, perdendo a compreensão das ideias fundamentais que a tornam um todo coeso. O ideal é que os professores sentem juntos e descubram ideias fundamentais unificadoras, mas poucos têm tempo para fazer isso, e muitos não têm colegas que se disponibilizariam a ter conversas assim. Quando os professores buscam identificar e discutir ideias fundamentais, sintonizam-se com a matemática que é mais importante e que pode ser vista nas tarefas, e também passam a perceber melhor as conexões que existem entre as tarefas e as ideias.

Cronograma dos livros da Ed. Infantil ao 8ª ano:
4º Ano: disponível agora
5º Ano: disponível em 20 de fev. de 2018
3º Ano: agosto de 2018
6º ao 8º ano: 2019
Ed. Infantil ao 2º ano: 2020

Como nós três temos desenvolvido materiais curriculares para professores da Ed. Infantil até o oitavo ano, também estabelecemos um conjunto de ideias fundamentais para cada ano e um conjunto de atividades engajadoras para cada uma delas. Neste artigo, apresentamos nossas ideias fundamentais na esperança de que sejam úteis para as discussões dos professores. As ideias fundamentais que desenvolvemos não pretendem ser definitivas e um grupo diferente de professores poderia muito bem ter formado um conjunto diferente de ideias, mas nós esperamos que elas sirvam para a leitura e reflexão. O livro do 4ª ano acabou de ser lançado e o do 5º será lançado em fevereiro de 2018 (Para mais detalhes sobre as datas de lançamento dos livros dos demais anos e como comprá-los, veja o final deste artigo).

Matemática de Mentalidade da Ed. Infantil ao 8º ano

Para cada grande ideia, nossos novos materiais curriculares têm três atividades, uma que engaja os alunos visualmente, uma que os engaja por meio de uma investigação que pode ser estendida a qualquer nível, e uma atividade de jogo, que propicia o aprofundamento das ideias. As atividades que desenvolvemos são voltadas a suplementar e enriquecer a grade curricular já existente nas escolas.

		
Visualize	Brinque	Investigue

Identificar as ideias fundamentais em cada ano foi um primeiro passo essencial para nós durante o desenvolvimento da grade curricular. Nós não podíamos começar a pensar sobre atividades, enigmas, ou investigações até que soubéssemos como ancorar as aulas em um conjunto coerente de ideias matemáticas. Começamos analisando os Padrões Curriculares Estadunidenses (Common Core[1]) e avaliamos quais conexões existiam dentro dos padrões, e entre os padrões, que se baseavam no ano anterior e foram cruciais para as ideias nos anos seguintes. Também pensamos cuidadosamente sobre as ideias que recebem pouca atenção nos padrões e currículos, mas são poderosas para os pensadores matemáticos, e as incluímos em nosso material.

Testamos nossas ideias fundamentais criando as redes a seguir, cientes de que, se uma ideia é verdadeiramente importante, ela será conectada a outras ideias no ano. Essas conexões dão a coerência matemática que ajuda a compreensão dos alunos, pois eles recorrem ao que sabem sobre uma grande ideia para aprender sobre outra.

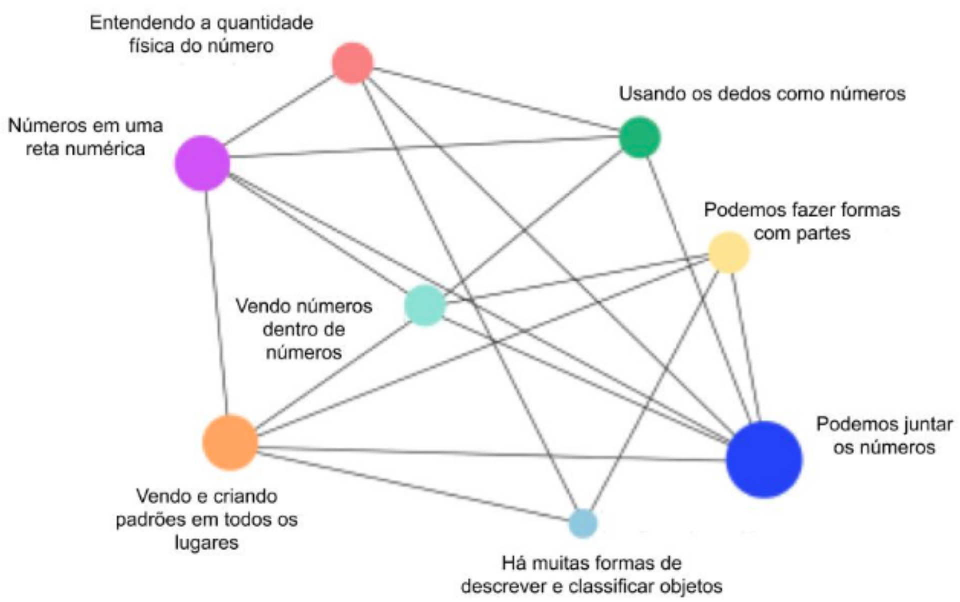
[1] O Common Core (equivalente a BNCC) é uma base que estabelece o conjunto de habilidades que os alunos devem ter a cada ano, da pré-escola ao ensino médio, nos EUA.

Há várias maneiras de usar esses mapas de ideias fundamentais. Você pode reunir-se com colegas e discutir como vocês entendem o significado de cada grande ideia e como ela se conecta ao que você ensina. Quais oportunidades devem ou precisam ser oferecidas aos alunos para que explorem essas ideias fundamentais? Como você pode dar destaque a essas ideias em suas aulas? Você também poderia explorar as conexões dentro de cada rede e perguntar: como esta grande ideia está conectada às outras? Como você descreveria essa conexão? Como você poderia dar aos alunos a oportunidade de conectar essas ideias? Por fim, você pode explorar como as ideias fundamentais em um ano estão conectadas aos anos anteriores e posteriores. Enquanto escrevíamos essas ideias fundamentais, estava claro para nós que existem ideias ainda maiores que permeiam toda a matemática, como buscar e nomear padrões, examinar e nomear relações, compor e decompor com números e formas, e assim por diante. Fazer conexões entre os anos é uma forma útil de começar a ver o campo matemático em sua completude.

É importante perceber que as ideias fundamentais que estabelecemos neste trabalho estão vivas, e nós prevemos que elas evoluirão com nosso pensamento, escrita e conversas com os professores. Para cada rede de ideias fundamentais, colocamos uma pequena legenda descrevendo o que vemos como o cerne do trabalho matemático de cada ano. Também destacamos algumas ideias que podem lhe surpreender, ou chamar sua atenção para algumas conexões. Você certamente verá muitos outros pontos de interesse nas ideias fundamentais, e sugerimos que você olhe, reflita, converse, questione, e explore.

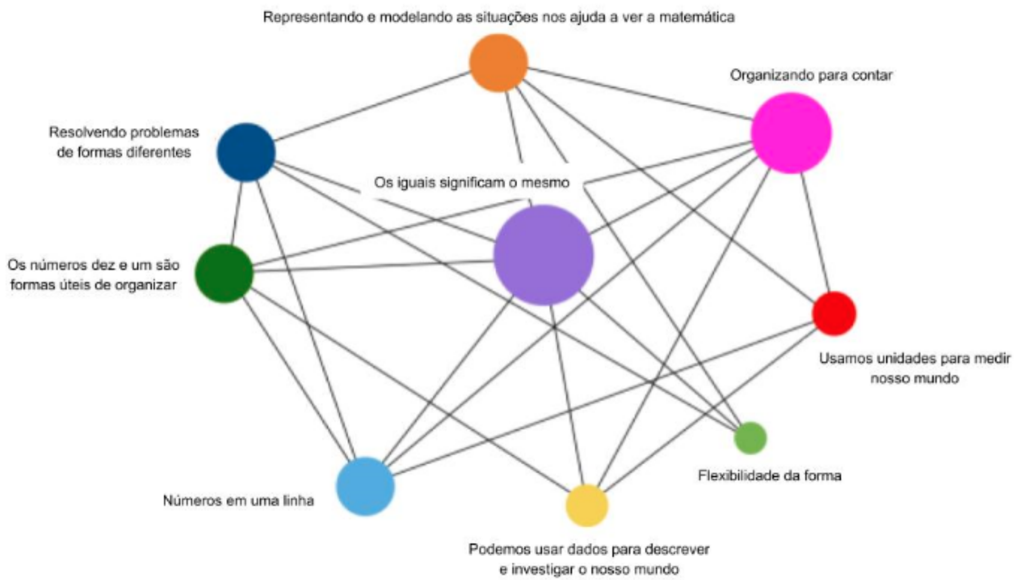
Ideias fundamentais das Mentalidades Matemáticas – livros da Ed. Infantil ao 8° ano.

Ideias fundamentais da Alfabetização



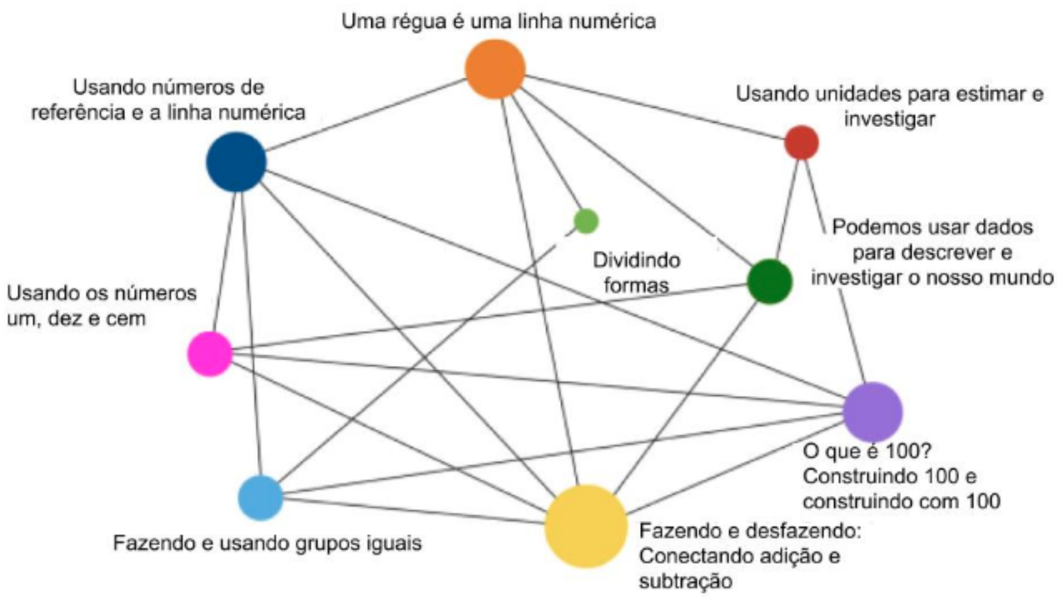
Na alfabetização, os alunos tentam descobrir o que os números significam – como eles se conectam aos dedos, objetos, movimentos, e entre si. Particularmente importante é como os números (e os objetos que representam) e as formas podem ser encaixados e separados para criar algo novo, mas relacionado. Esses são os primeiros passos poderosos para estimular os alunos a buscar e nomear conexões matemáticas. Para aprender mais sobre por que os dedos são tão importantes para a matemática, acesse: BOALER; CHEN (2016). https://www.theatlantic.com/education/archive/2016/04/why-kids-should-use-their-fingers-in-math-class/478053/

Ideias fundamentais do 1º Ano



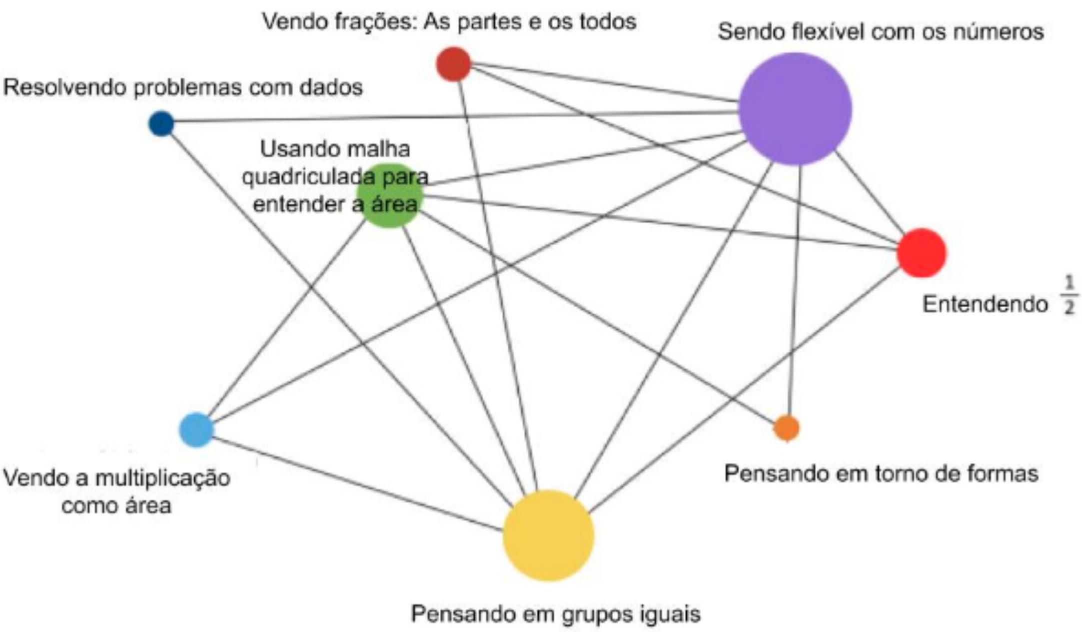
Organizar e ver equivalências são ideias que permeiam o 1º ano. Os alunos precisam desenvolver formas de organização para a contagem e a comparação, e, por fim, encontrar sentido em nosso sistema de notação posicional. A equivalência significa aprender a avaliar o que torna as coisas diferentes e o que as torna iguais. Por exemplo, 4 + 1 e 5 são equivalências, mesmo que pareçam diferentes, e os alunos precisam desenvolver variadas estratégias para adicionar 4 e 1 para chegar a 5. Essas estratégias são diferentes, mas relacionadas e equivalentes em seus resultados. Lidar com equivalências e organização é um trabalho importante no 1º ano.

Ideias fundamentais do 2° Ano



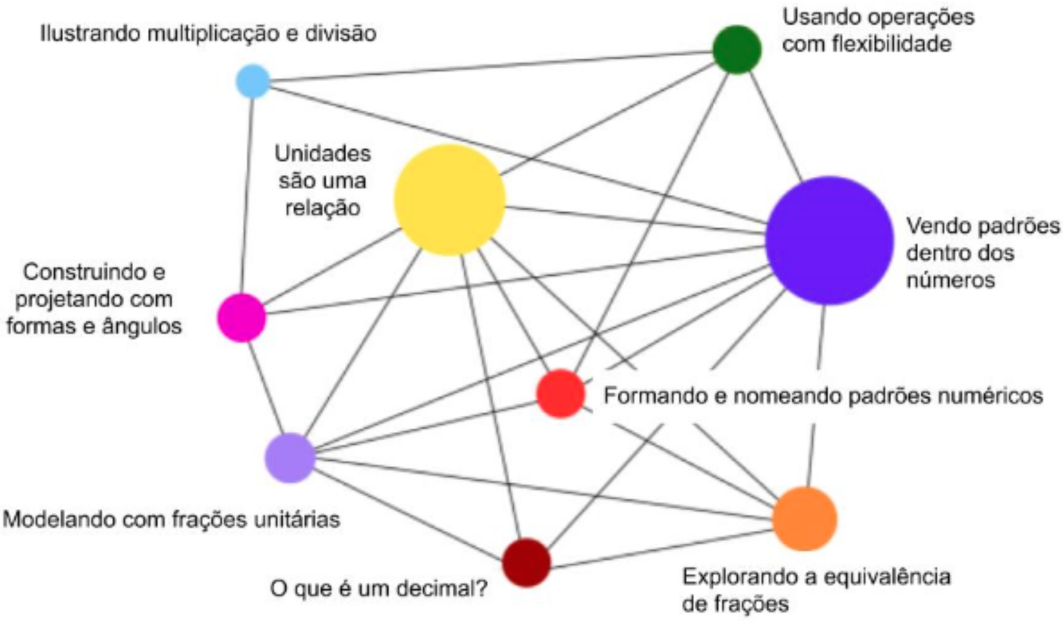
Os alunos do 2º ano pensam profundamente sobre a familiarização com números de referência, para que possam usá-los como ferramentas para compor, decompor, e comparar números. Pensar com partes, como unidade, dezenas e centenas, e negociar como usá-los em grupos e em posições na reta numérica para resolver problemas é essencial para este ano. Os alunos precisam continuamente ancorar seu raciocínio sobre o número em todos os lugares do mundo real onde os números são usados para descrever e investigar, o que inclui estimar comprimentos e pensar com dados.

Ideias fundamentais do 3º Ano



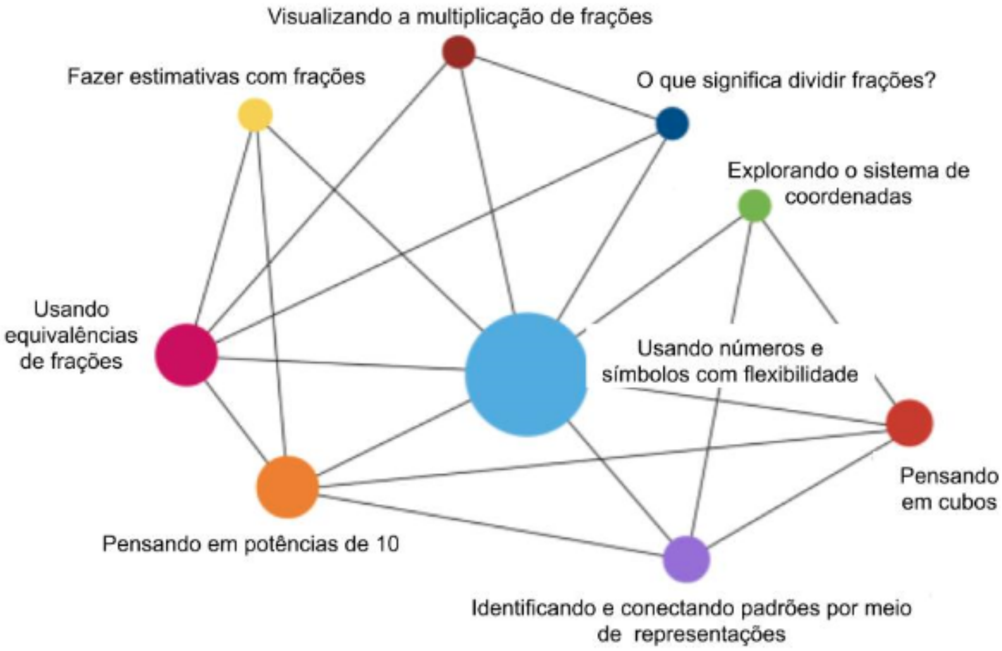
Algumas ideias realmente grandes assumem o protagonismo no 3º ano. O trabalho que os alunos fizeram para pensar em grupos no 2º ano agora assume a forma de refletir sobre grupos iguais – e colunas e fileiras – na multiplicação. Ser flexível com números é nossa resposta para a fluência; em vez de focar na rapidez de cálculo, nós posicionamos a capacidade de ser flexível como uma grande ideia, nela, usamos as conexões entre números e os padrões que percebemos para ajudar os alunos a desenvolver uma estrutura interna flexível às relações numéricas, às quais eles podem recorrer com qualquer matemática. O 3º ano é também o momento em que o raciocínio sobre frações passa a se fortalecer, e isso começa com uma compreensão profunda e flexível do , no qual os alunos podem se basear para entender e visualizar outras unidades de fração. Para aprender mais sobre por que os testes cronometrados deveriam ser substituídos por atividades de senso numérico, acesse: BOALER, WILLIAMS, CONFREY (2015) https://www.youcubed.org/pt-br/evidence/fluencia-sem-medo/

Ideias fundamentais do 4º Ano



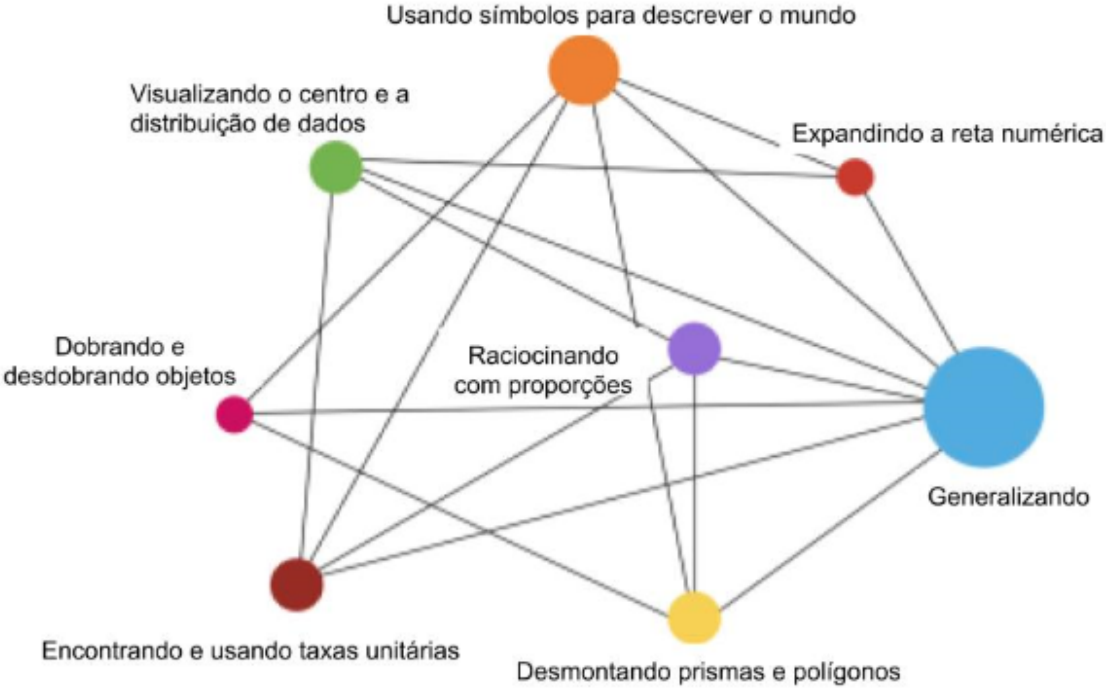
Criar padrões sobre as relações e examiná-las está no cerne do 4º ano. Os alunos começam a refletir sobre como identificar e expressar padrões, tanto visual quanto numericamente, e a construir as bases do raciocínio proporcional ao pensar sobre as conexões entre as unidades. Os alunos analisam as frações e decimais para encontrar as relações representadas aqui – relações entre numerador e denominador, fração e decimal, e decimal e valor posicional. Os alunos do 4º ano usam relações para conectar multiplicação e divisão, e pensar de modo flexível entre as operações.

Ideias fundamentais do 5º Ano



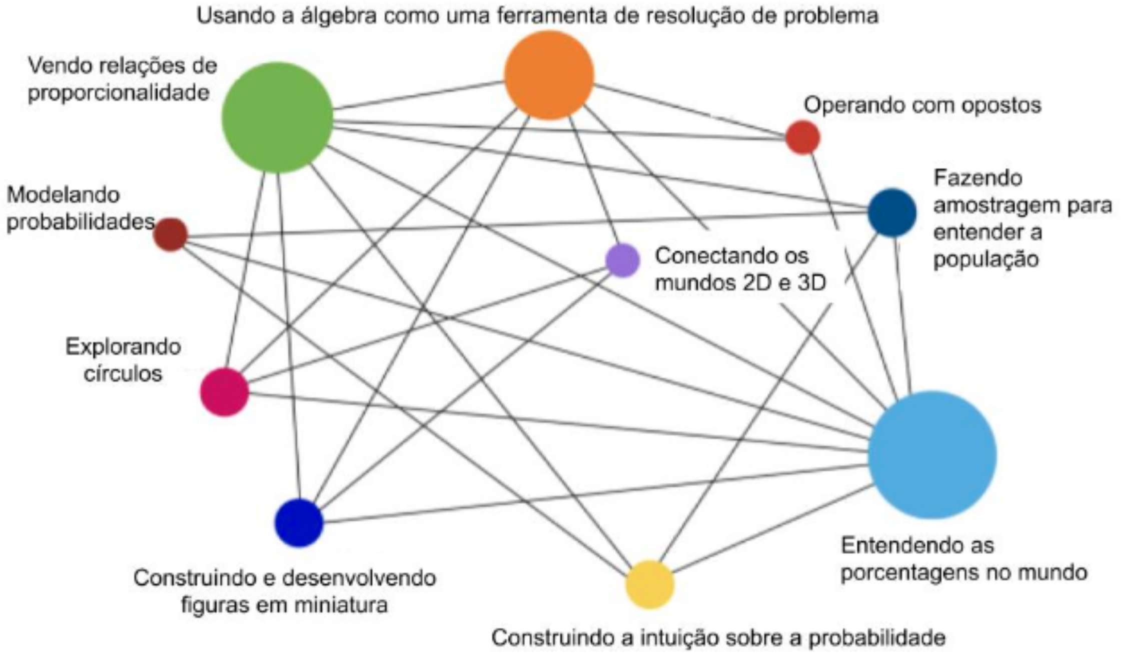
No 5º ano, os alunos estão profundamente debruçados sobre as noções de equivalência e flexibilidade, relacionadas tanto a operações quanto frações, particularmente. As relações entre as frações e o uso das relações no mundo para compreender multiplicação, divisão, e estimativa exigem bastante exploração. Nós acrescentamos a criação de estimativas com frações porque pensar sobre porções é uma ideia útil e subdesenvolvida que dá significado e utilidade às frações. Assumindo o protagonismo no 5º ano estão as ideias sobre padrões e relacionamentos no espaço bi e tridimensional. Os alunos começam a usar o plano coordenado para representar e questionar relacionamentos, e começam a pensar sobre como contar e representar volume ancorando-se em unidades cúbicas.

Ideias fundamentais do 6º Ano



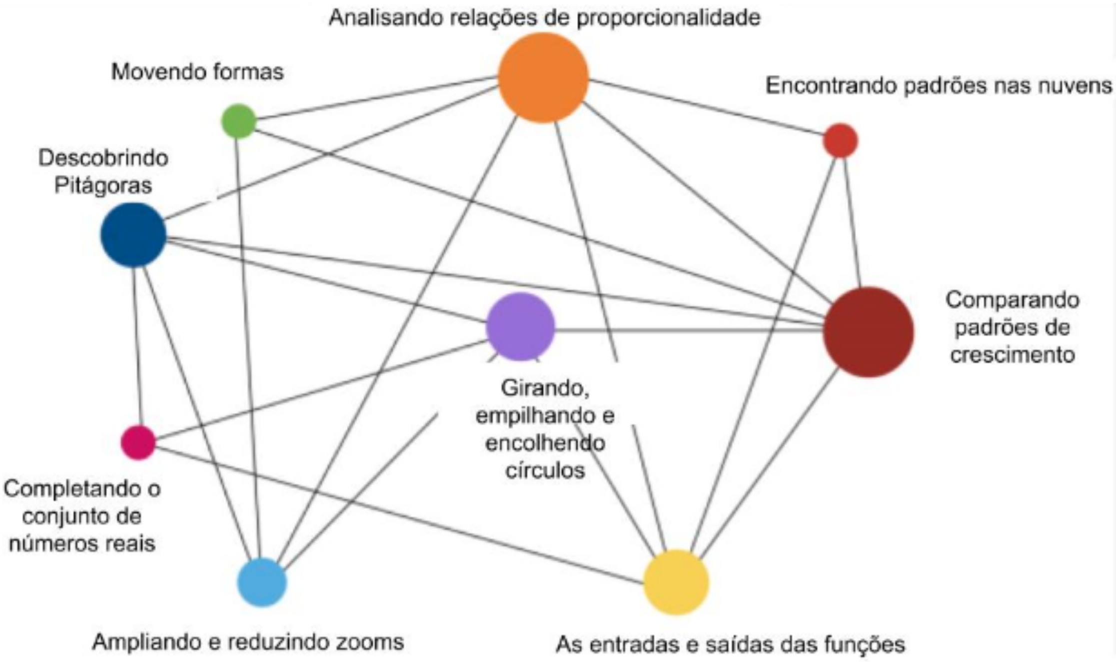
O raciocínio proporcional, as taxas unitárias, e a generalização das relações são elementos centrais para o 6º ano. Isso representa uma grande mudança para os alunos e merece atenção profunda e constante. Os alunos constroem novas formas de representar o mundo simbolicamente, sobre a reta numérica, e através de dados que acrescentam nuances – tanto da bagunça quanto da ordem – ao campo matemático. Os alunos do 6º ano desenvolvem novos modos de compor e decompor com formas bi e tridimensionais, pensando sobre volume e área como aditivos e usando redes para explorar as superfícies que criam sólidos.

Ideias fundamentais do 7º Ano



O 7º ano inclui um novo espaço amplo, dedicado a porcentagens e à compreensão da probabilidade, valendo-se do raciocínio proporcional dos alunos, que conectam o raciocínio proporcional ao mundo bi e tridimensional por meio da construção da réplica em miniatura. A álgebra é usada como ferramenta de resolução de problemas, não apenas um espaço matemático em si, e os alunos podem conectá-la ao trabalho que fazem com proporção, geometria, e o novo mundo de números inteiros.

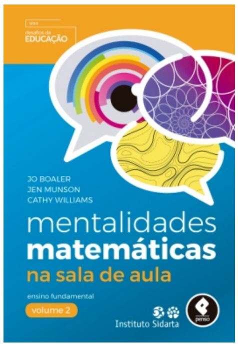
Ideias fundamentais do 8º Ano



As relações proporcionais continuam a ser um centro de raciocínio matemático no 8º ano, servindo de ferramenta para o pensamento sobre padrões de crescimento, funções, e transformação geométrica. As funções são um acréscimo importante ao espaço algébrico no 8º ano. Vemos Pitágoras como um ponto de entrada fundamental na exploração do sistema de números reais, padrões de crescimento, e círculos, os quais chamamos de Virar, Empilhar e Reduzir Círculos. Uma grande ideia que desafia a noção dos alunos de relações lineares e puras, após todo o trabalho com as funções e proporções, é a que chamamos Encontrar os padrões nas nuvens. Os dados no mundo real raramente são organizados e padronizados; esse é um momento importante para desenvolver as lentes para olhar os gráficos de dispersão e perguntar genuinamente quais relações podem ser encontradas nas nuvens?

Conclusão

Ao oferecer essas ideias fundamentais da Ed. Infantil ao 8º ano, nossa esperança é de que elas estimulem o pensamento sobre os fios que se entrelaçam na matemática e são fundamentais pra o aprendizado matemático dos alunos. Muitos professores, assim como alunos, receberam a ideia distorcida de que a matemática é apenas uma longa lista de métodos e regras desconexos. Esperamos que nossas ideias deem início a conversas significativas entre os professores sobre as ideias fundamentais e as conexões que as relacionam entre si. Se você não tem colegas com quem possa discutir essas ideias (e mesmo que os tenha), nosso grupo do Youcubed no Facebook (https://www.facebook.com/groups/youcubed) é um espaço adorável para discussões relativas ao ensino. Quando os professores estão pensando sobre ideias fundamentais, ficam mais sintonizados com as tarefas mais importantes que devem escolher para os alunos e as conexões que devem destacar em conversas e ao longo das aulas. Olhar para as ideias fundamentais, em diferentes anos, também ajudará os professores a ver que o que os alunos têm aprendido e vão aprender. Estamos agora no século XXI, os alunos não precisam ser treinados para ser calculadores – a tecnologia serve pra isso –, mas eles de fato precisam vivenciar a matemática como uma bela e conectada matéria de ideias fundamentais duradouras. Os alunos que aprendem por meio de ideias fundamentais e conexões desfrutam mais da matemática, compreendem-na mais profundamente e estão mais bem preparados para encarar os grandes problemas complexos e as descobertas que encontrarão em suas vidas.



(Para comprar o 4º ano, visite o link abaixo)

(Para comprar o 5º ano, visite o link abaixo)

https://www.youcubed.org/pt-br/resource/livros/

Referências

BOALER, J.; CHEN, L. Why Kids should Use theur Fingers in Math Class. **The Atlantic**, 2016. Disponível: https://www.theatlantic.com/education/archive/2016/04/why-kids-should-use-their-fingers-in-math-class/478053/

BOALER, J.; WILLIAMS, C.; CONFREY, A. Fluência Sem Medo: Pesquisas Mostram as Melhores Formas de Aprender Fatos Matemática. **Youcubed**, 2015. Disponível em: https://www.youcubed.org/pt-br/evidence/fluencia-sem-medo/

BOALER, J. Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso – Artmed, 2017.

BOALER, J.; ZOLDO, P. Scientific American Mind. Why Math Education in the US Doesn't Add Up, 2016. Disponível em: https://www.scientificamerican.com/article/why-math-in-the-u-s-doesn-t-add-up/

BOALER, J.; SELLING, S. Pshychological Imprisonment or Intellectual Freedom? A Longitudinal Study of Constrasting School Mathematics Approaches and Their Impact on Adult's Lives. Journal of Research in Mathematics Educarion. v. 48, n. 1, p. 78-105, 2017. Disponível em: https://www.nctm.org/Publications/Journal-for-Research-in-Mathematics-Education/2017/Vol48/Issue1/Psychological-Imprisonment-or-Intellectual-Freedom_-A-Longitudinal-Study-of-Contrasting-School-Mathematics-Approaches-and-Their-Impacton-Adults_-Lives/

CHARLES, R. Big Ideas and Understandigns as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. **Journal of Mathematics Education**, v. 7, n. 3, p. 9-24, 2005.

CONFREY, J. Learning Trajectories from Jere Confrey and colleagues at NC State University. Disponível em: https://www.sudds.co/
http://jaymctighe.com/wordpress/wp-content/uploads/2011/04/MATH-Big-Ideas_NCSM_Spr05v73p9-24.pdf

SCHIFTER, D. RUSSEL, S.J.; BASTABLE, V. Teaching to the Big Ideas. IN: SOLOMIN, M.Z. (org.). **The Diagnostic Teacher**: Constructing New Approaches to Professional Development. Teachers College Press: New York, 1999, p. 22-48. Disponível em:

https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=bDO6lAr1idIC&oi=fnd&pg=PA22&dq=big+ideas+in+mathematics&ots=jt1LClIETt&sig=KpnVP-uv3VbIgrn3CzGu-DWX89g#v=onepage&q=big%20ideas%20in%20mathematics&f=false

SCHWARTZ, D.; BRANSFORD, J. A Time for Telling. **Cognition and Instruction**, v. 16, n. 4, p. 475-522, 1998.

Apêndice / Outras Pesquisas

CHARLES, R. Big Ideas and Understandings are the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. **Journal of Mathematics Education Leadership**, v. 7, n. 4, p, 9-24, 2005. Disponível: http://jaymctighe.com/wordpress/wp-content/uploads/2011/04/MATH-Big-Ideas_NCSM_Spr05v73p9-24.pdf

Learning Trajectories from Jere Confrey and colleagues at NC State University: https://turnonccmath.net/

SCHIFTER, D.; RUSSELL, S. J.; Bastable, V. Teaching to the Big Ideas. IN: Solomon, M. Z. (org.). **The Diagnostic Teacher**: Constructing New Approaches to Professional Development. Teachers College Press: New York, 1999, p. 22-48. Disponível em: https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=bDO6lAr1idIC&oi=fnd&pg=PA22&dq=big+ideas+in+mathematics&ots=jt1LClIETt&sig=KpnVP-uv3VbIgrn3CzGu-DWX89g#v=onepage&q=big%20ideas%20in%20mathematics&f=false