

## VER PARA ENTENDER: A importância da matemática visual para o cérebro e o aprendizado.



Jo Boaler, professora de Educação Matemática, com Lang Chen, do Laboratório de Neurociência Cognitiva e de Sistemas de Stanford; Cathy Williams & Montserrat Cordero, do Youcubed, Universidade de Stanford.

<http://www.youcubed.org/visual-math-network/>

### Introdução

*Algumas semanas atrás, o silêncio de meu escritório em Stanford foi interrompido por um telefonema. Uma mãe me ligou para dizer que a filha de 5 anos tinha voltado da escola chorando porque a professora não a deixou contar com os dedos. Algumas semanas depois, quando contei à minha turma de graduandos que a matemática visual era muito importante, um deles perguntou: – Mas só para níveis mais básicos, né?*

A professora e o aluno em questão refletem uma crença comum em educação – a de que a matemática visual serve só ao nível elementar, para aqueles com dificuldades ou mais jovens. E que o trabalho com recursos visuais deve ser só uma introdução para uma matemática mais avançada ou abstrata. De acordo com o autor Thomas West, há uma crença secular de que as palavras e os símbolos matemáticos são “para profissionais sérios – enquanto as imagens e diagramas” são “para crianças e o público leigo” (2004).

Essa ideia é um exemplo de um mito danoso na educação. Este artigo vai apresentar evidências contundentes sobre o cérebro que ajudam a desfazê-lo. Nós também vamos fornecer exemplos de quando a matemática visual pode ser integrada aos materiais curriculares, além de ideias para serem usadas da educação básica à faculdade.

Oferecer modos de *ver, entender e ampliar* ideias matemáticas tem sido subdesenvolvido ou ignorado na maioria dos currículos nos Estados Unidos, que em grande medida continuam apresentando a matemática como uma matéria escolar quase que exclusivamente numérica e abstrata. No entanto, quando os alunos aprendem por meio de abordagens visuais, eles passam a ter acesso a compreensões novas e profundas. Com isso, a disciplina muda para eles.

Mostraremos evidências neurológicas que nos ajudam a entender o impacto de ver para aprender matemática. Elas apontam também para a necessidade urgente de mudar a maneira como a disciplina é oferecida em sala de aula.

Bons professores, em geral, usam recursos visuais e materiais diversos para melhorar a compreensão de conceitos matemáticos. As próprias organizações especializadas norte-americanas, como o Conselho Nacional de Professores de Matemática (*National Council for the Teaching of Mathematics – NCTM*) e a Associação de Matemática dos Estados Unidos (*Mathematical Association of America – MAA*), há muito tempo defendem o uso de múltiplas representações no ensino.

Mas, para milhões de alunos nas salas de aula dos Estados Unidos, a disciplina é quase inteiramente apresentada como se fosse só números e símbolos. Assim, muitas oportunidades de desenvolver a compreensão visual são perdidas. Os alunos que apresentam preferência pelo raciocínio visual são geralmente taxados, nas escolas, como portadores de necessidades educacionais específicas.

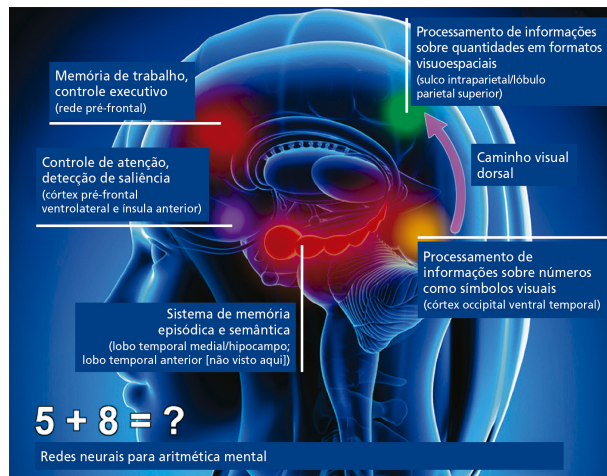
Muitas crianças pequenas escondem que contam com os dedos, pois as fizeram acreditar que isso é infantil, ou até mesmo errado. O artigo a seguir, feito de modo colaborativo entre uma neurocientista e professores de matemática, apresenta novas e formidáveis evidências de estudos do cérebro que comprovam a necessidade e a importância do raciocínio visual – e, curiosamente, das representações com dedos – para aprender matemáticas em todos os segmentos de ensino.



## O que diz a ciência do cérebro?

Nos últimos anos, os cientistas adquiriram uma compreensão mais elaborada das formas como nosso cérebro trabalha quando estudamos e aprendemos matemática.

O cérebro é composto de muitas 'redes distribuídas'. Quando lidamos com o conhecimento, então, várias áreas são ativadas e se comunicam entre si. Ao resolvermos um problema matemático, especificamente, a atividade cerebral está acontecendo



em redes que incluem duas vias visuais: a ventral e a dorsal (veja a Figura 1). As neuroimagens mostraram que, quando as pessoas fazem um cálculo numérico, como  $12 \times 25$ , com dígitos simbólicos (12 e 25), o raciocínio matemático baseia-se no processamento visual.

Uma rede cerebral amplamente distribuída estabelece o processamento mental do conhecimento matemático (MENON, 2014). Estudos têm comprovado que a área do cérebro apresentada na cor verde, parte da via visual dorsal, é ativada durante a execução de tarefas matemáticas tanto em crianças quanto em adultos. Essa parte específica do cérebro entra em ação quando os alunos analisam representações visuais ou espaciais que representam quantidades, como uma linha numérica. Estudos cognitivos mostraram que a representação de uma quantidade numa linha numérica é especialmente importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático, e precursor do sucesso acadêmico das crianças (KUCIAN et al., 2011; HUBBARD E. M. et al., 2005; SIEGLER & BOOTH, 2004; SCHNEIDER M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J., 2009).



Os pesquisadores descobriram, inclusive, que as diferenças de conhecimento entre alunos de baixa renda e de classe média eram eliminadas após quatro sessões de 15 minutos de jogo com uma linha numérica (SIEGLER; RAMANI, 2008). Eles também enfatizaram a importância de os alunos aprenderem o conhecimento numérico por meio de representações e recursos visuais.

Essa é apenas uma das muitas pesquisas que mostram que problemas de matemática visual influenciam o desempenho dos estudantes (veja, por exemplo, REIMER, 2005). A neurociência chama atenção para isso, pois mostra que a via visual dorsal é a mais importante região do cérebro para representar o conhecimento de quantidades.

Um estudo que ainda será publicado por nossos colegas de Stanford, com crianças entre 8 e 14 anos, revela que, durante o crescimento, as crianças desenvolvem parte da via visual ventral, exibida na cor laranja na Figura 1, e o cérebro torna-se mais sensível e especializado em representar formas visuais numéricas. Há uma interação importante e cada vez maior entre duas vias visuais. Isso indica que, à medida que as crianças crescem e se desenvolvem, o cérebro torna-se mais interativo, conectando o processamento visual de formas numéricas simbólicas, como o número 10, com o conhecimento visual-espacial de quantidade, como um conjunto de dez pontos (BATTISTA et al., não publicado).

Quando raciocinamos sobre uma questão matemática, diferentes áreas do cérebro estão envolvidas, inclusive as redes frontais nas cores vermelhas e roxas, o lobo temporal medial e, acima de tudo, o hipocampo – que aparece em forma de ferradura na área vermelha. Neste artigo, desejamos enfatizar que a base neurobiológica da cognição matemática envolve uma comunicação complicada e dinâmica entre os sistemas cerebrais da memória, controle e detecção, e das *regiões de processamento visual do cérebro*.

Um exemplo contundente, e um tanto surpreendente, da natureza visual da atividade matemática no cérebro está em uma pesquisa recente sobre as formas como o cérebro usa as representações dos dedos, que vão muito além da contagem do tempo e da idade. Investigações do tipo oferecem *insights* fascinantes sobre o aprendizado humano e trazem implicações claras para as aulas de matemática.

### *Os dedos e a compreensão da matemática*

Ilaria Berteletti e James R. Booth (2015) investigaram uma parte específica do cérebro dedicada à percepção e representação dos dedos, conhecida como área dos dedos cerebral somatossensorial. É importante destacar que os estudiosos do cérebro sabem que nós “vemos” uma representação dos dedos na nossa cabeça, mesmo quando não fazemos uso deles em um cálculo.

Quando calculamos, nós “vemos” uma representação dos dedos em nosso cérebro

Berteletti e Booth descobriram que, quando crianças entre 8 e 13 anos receberam problemas complexos de subtração, a área somatossensorial dos dedos foi ativada, mesmo sem elas usarem as mãos para contagem. Outra constatação é que a área de representação dos dedos estava ainda mais envolvida em problemas bem complexos, com números maiores.



Penner-Wilger (2013) concluiu que até o conhecimento somatossensorial dos dedos de alunos universitários indica suas pontuações em cálculo e também que a percepção a esse respeito no 1º ano do Ensino Fundamental indica como será o desempenho em comparação e a estimativa numéricas no 2º ano (PENNER-WILGER et al., 2009).

Os pesquisadores avaliam se as crianças têm uma boa consciência de seus dedos tocando o dedo de um aluno sem que ele veja qual dedo foi tocado – e então perguntando qual está sendo tocado.

As evidências tanto dos estudos comportamentais quanto da neurociência mostram que, quando as pessoas praticam e aprimoram formas de perceber e representar os próprios dedos, elas conseguem um melhor desempenho em matemática (LADDA et al., 2014; GRACIA-BAFALLI; NOEL, 2008). Os pesquisadores descobriram que, quando crianças de 6 anos de idade melhoravam suas representações com os dedos, elas também avançavam no conhecimento em aritmética, particularmente em termos de subitização<sup>1</sup>, que é uma “percepção instantânea” de contagem e ordenação de números. É interessante notar que a representação dos dedos das crianças é considerada um dos melhores indicativos de seu sucesso futuro na matemática, mais do que as notas em testes de processamento cognitivo.

*A representação dos dedos em crianças de 6 anos é um melhor indicativo do futuro sucesso na matemática do que os resultados de testes de processamento cognitivo.*

Uma das recomendações dos neurocientistas condutores desses estudos é que as escolas foquem na *discriminação dos dedos*. Não só a contagem com eles é importante para o desenvolvimento do cérebro e o futuro sucesso na matemática, mas também ajudar as crianças a identificar qual é qual. Esse fator em especial é significativo para nós, uma vez que, atualmente, as escolas não dão qualquer atenção a isso e nenhum currículo conhecido estimula essa atividade. Em vez disso, muitos professores foram levados a acreditar que usar as mãos é infantil, uma etapa que deve ser superada o mais rápido possível. O Kumon, programa de reforço escolar usado por milhares de famílias em 49 países, proíbe a contagem com os dedos e orienta os pais a denunciar seus filhos ao instrutor caso isso aconteça (KUMON, 2014).

Os neurocientistas ainda não chegaram a um consenso sobre quais mecanismos exatos fazem com que o conhecimento sobre os dedos melhore o desempenho em matemática, mas concordam que desenvolver representações numéricas com eles é essencial. Brian Butterworth, renomado estudioso do cérebro nessa área, afirma que, se os alunos não estão aprendendo sobre os números por meio da reflexão sobre seus dedos, os números “jamais terão uma representação normal no cérebro” (BUTTERWORTH, 1999, p. 249-250).



Apesar das evidências claras sobre usar as mãos para aprender matemática, sobram recomendações para banir essa ferramenta a pais e educadores. Dizer aos alunos para não usarem os dedos para contar ou representar quantidades significa interromper sua evolução matemática. Eles são nosso recurso visual mais fácil e útil, essencial ao desenvolvimento cerebral que se prolonga até a idade adulta. Inclusive, talvez seja essa habilidade que explique por que pianistas, e outros músicos, em geral, demonstram uma ótima compreensão da matemática. (veja em:

<<http://www.livescience.com/51370-does-music-give-you-math-skills.html>>).

A recomendação dos neurocientistas é que os dedos sejam entendidos como a conexão entre os números e sua representação simbólica, além de um suporte externo para o aprendizado de problemas aritméticos.

Nenhum dos materiais conhecidos do currículo norte-americano contém exercícios que ajudem os alunos a desenvolver a discriminação dos dedos; então, nós fizemos uma gama de atividades que podem ser usadas em sala de aula e em casa. A ideia é ajudar as crianças e impulsionar o trabalho na área.

É importante ressaltar que os professores devem comemorar e estimular o uso dos dedos com crianças pequenas e permitir que alunos de qualquer idade fortaleçam sua capacidade cerebral por meio desse tipo de contagem. Isso não significa continuar contando assim para sempre. Mas quer dizer que qualquer pessoa que precise contar usando os dedos, deve fazê-lo porque isso é crucial para o desenvolvimento cerebral. É importante derrubar o estigma sobre a utilização das mãos na hora de fazer contas e ver essa atividade como algo inerentemente importante e valioso.

---

<sup>1</sup>N. do R. T.: No original, as autoras utilizam o termo “*subitizing*”, cuja tradução seria “subitização” (derivada do espanhol “*subitización*”), porém, raramente utilizada em língua portuguesa mesmo em artigos especializados que tratam de senso numérico. Seu significado está relacionado ao processo de estimar pequenas quantidades, como até 5, perceber, de súbito, a quantidade pela sua configuração e não a contagem.



### *Cognição corporificada*

As evidências que se tornam cada vez mais claras, mostrando a importância das vias e conexões visuais entre diferentes rotas no cérebro, estão em consonância com uma área de pesquisa conhecida como “cognição corporificada”.

A maioria das pessoas acredita que mente e o corpo são totalmente separados. A primeira seria fonte de abstrações que transmite conhecimento para o corpo, receptor passivo e mero executor físico. No entanto, pesquisadores que estudam cognição corporificada apontam que muitos dos nossos conceitos matemáticos são processados em memórias motoras visuais e sensoriais.

Eles observam as formas como nós nos portamos, olhamos, gesticulamos, apontamos e usamos ferramentas quando expressamos ideias matemáticas. Esse conjunto de informações foi usado como evidência de que processamos ideias matemáticas nas áreas motoras e perceptivas do cérebro (NEMIROVSKY et al., 2012) – o que também foi comprovado por outros estudos do cérebro.

A Ciência mostra que, quando explicamos o que estamos pensando, mesmo quando não encontramos as palavras adequadas, tendemos a desenhar formas no ar. Podemos também usar o espaço ao nosso redor para “espalhar” ideias. Por exemplo, decidir que o lado

de uma tabela representa uma ideia, e apontar de novo para ela quando queremos nos referir a essa ideia, mesmo que não haja nada lá, só nossos movimentos anteriores designando o espaço (ALIBALI; NATHAN, 2012).



Figura 2: A professora está desenhando um círculo no ar enquanto descreve

REALIZADOR



APOIADOR



Os estudiosos não acreditam que haja uma separação entre mente e corpo. Eles concluíram que o corpo é parte intrínseca da cognição, que as partes do nosso cérebro que controlam a percepção e o movimento também estão envolvidas na representação do conhecimento (HALL; NEMIROVSKY, 2011). Sabe-se bem que o conhecimento da dança, ou de esportes, é processado nas áreas motoras sensoriais do cérebro, mas muitos ficariam surpresos ao descobrir que o conhecimento matemático também é processado em memórias sensório-motoras.

Alguns pesquisadores de cognição corporificada concluíram que, uma vez que usamos gestos quando pensamos matematicamente, os professores devem usá-los para fundamentar o raciocínio matemático, juntamente com as explicações verbais (ALIBALI; NATHAN, 2012). Contudo, os pesquisadores não defendem que sejam dados esquemas prontos de gestos nas aulas, mas que os alunos tenham oportunidade de desenvolver seus próprios esquemas. Nós gesticulamos porque vemos e experimentamos a matemática, assim como nos lembramos dela, fisicamente e visualmente. Uma ênfase maior em aspectos visuais e físicos ajudará os alunos a entender a matemática. Nesse sentido, dar a eles gestos de outra pessoa parece contraproducente. Em vez disso, devemos disponibilizar mais experiências com a matemática visual e física, ideia que exploraremos a seguir.

#### *Implicações nas Salas de Aula e em casa*

Os novos conhecimentos mostram o processamento visual das ideias matemáticas e podem explicar as evidências indicando que docentes que destacam a matemática visual e fazem uso consciente de certos materiais estimulam a melhora no desempenho dos alunos, não só em todo o ensino fundamental (veja, por exemplo, REIMER, 2005), mas também no ensino médio e na universidade (SOWELL, 1989). Em sintonia com essas pesquisas, se nós perguntarmos aos melhores professores sobre a importância das representações visuais, eles muitas vezes compartilharão o rico conhecimento que possuem sobre a profunda compreensão que é ativada tanto nos professores que estão apresentando ideias matemáticas visualmente quanto nos alunos que estão usando os recursos visuais para pensar e entender a disciplina. Volumes inteiros da Associação Americana de Matemática (Mathematical Association of America – MAA) dedicam-se a estimular a matemática visual nas faculdades (veja, por exemplo, ZIMMERMANN & CUNNINGHAM, 1991).

Quando no último verão nossa equipe do Youcubed (centro de Stanford que oferece a pais e professores recursos matemáticos baseados em pesquisas) criou um conjunto gratuito de aulas de matemática visual que iam do 3º ao 9º ano, elas foram baixadas 250 mil vezes e utilizadas em todo o território norte-americano. Entre os professores, 80% disse que gostaria de baixar mais atividades semelhantes enquanto 83% dos





alunos relataram que as atividades visuais melhoraram seu aprendizado de matemática.

Apesar da prevalência da ideia de que desenhar, visualizar ou trabalhar com modelos é algo de nível elementar, útil só para para crianças pequenas, parte da mais interessante e complexa matemática é predominantemente visual. Maryam Mirzakhani ganhou as manchetes do mundo quando se tornou a primeira mulher a vencer a cobiçada medalha Fields, o maior prêmio da área. Seu trabalho baseia-se em grande medida na matemática visual. Alguns de seus pares descreveram suas teorias como “lindas”, “impressionantes” e apontaram que elas conectavam conhecimentos antes desvinculados. As crianças podem passar centenas de horas calculando e vendo apenas números e símbolos, mas os matemáticos raramente, talvez nunca, resolvem um problema sem representações visuais. Segundo West (2004, p. 27): “Para um matemático, prescindir das imagens é masoquismo”.

No entanto, outro motivo para o qual a matemática visual deve ser usada nas escolas de forma mais extensiva está na natureza do conhecimento necessário para o mundo altamente tecnológico de hoje. Anos atrás, o conhecimento nos ambientes de trabalho era baseado em palavras e números, mas o novo conhecimento do mundo é, em grande medida, baseado em imagens, que “são ricas em conteúdo e informações” (WEST, 2004). A maioria das empresas já têm grandes quantidades de dados, conhecidos como “*big data*” e o trabalho do futuro com mais demanda é a compreensão de dados e a busca por padrões visuais nessa grande massa de informações. Os cientistas da computação e matemáticos de Stanford, entre outros, agora *veem* padrões em dados que jamais teriam sido identificados com as técnicas estatísticas.

Quando testamos nossas atividades de matemática visual que compartilhamos no **youcubed.org** em uma escola de Ensino Fundamental, uma mãe me parou e perguntou o que havíamos feito em sala naquela semana. Ela me disse que sua filha sempre dizia que não gostava de matemática e que não conseguia fazer cálculos, mas, depois das nossas aulas, ela voltou para casa dizendo que tinha mudado de ideia e que conseguia ver um futuro na disciplina. Por quê? A matemática agora era aberta, criativa, visual (para mais exemplos, ver BOALER, 2016). Essa prática não só oferece um engajamento mais profundo, novas compreensões e estímulos cerebrais, como também mostra que a matemática pode ser uma matéria aberta e bela, em vez de fixa, fechada e impenetrável. A matemática visual não é importante apenas para alguns alunos – aqueles com dificuldades ou os chamados “pensadores visuais”, tampouco é apenas um prelúdio para a parte abstrata –, ela é importante para todos, em todos os níveis.

Não é de surpreender que os alunos achem a matemática inacessível e desinteressante se estão imersos em um mundo de abstração e números. Isso é particularmente irônico quando há uma abordagem diferente de ensino – de uma matemática visual e criativa (<<https://youcubed.org/week-of-inspirational-math/>>).



As aulas de matemática nos Estados Unidos não refletem o conhecimento que temos da importância das abordagens da matemática visual, assim como a maioria dos padrões curriculares e livros didáticos não são convidativos ao raciocínio visual. Muitos materiais oferecem imagens, mas elas são geralmente decorativas. Em seus padrões da Educação Básica até o 9º ano, o Common Core<sup>2</sup> dedica bem mais atenção ao trabalho visual do que muitos similares anteriores, mas seu conteúdo para o Ensino Médio mantém os docentes arraigados ao raciocínio numérico e abstrato. Quando o Common Core de fato estimula o trabalho visual, ele serve apenas como introdução para o desenvolvimento do pensamento abstrato, em vez de ser uma ferramenta para ver e entender ideias matemáticas e fortalecer redes cerebrais.

Alguns anos atrás Howard Gardner propôs uma teoria de inteligências múltiplas (2008/2011), sugerindo que as pessoas tinham diferentes abordagens ao aprendizado, como a visual, cinestésica ou lógica. Essa teoria conseguiu expandir a forma como as pessoas viam a inteligência e a competência, mas ela, em geral, foi mal utilizada nas escolas. Alguns alunos foram rotulados ou tratados de maneira diferente.

No entanto, aqueles cujo lado forte não é o raciocínio visual, provavelmente, precisam dele mais do que qualquer outra pessoa. Todo mundo usa as vias visuais quando trabalha com matemática e todos nós precisamos desenvolver isso em nosso cérebro. O

*Todo mundo usa as vias visuais quando trabalha com matemática e todos nós precisamos desenvolver áreas visuais em nosso cérebro.*

problema da matemática nas escolas é que ela tem sido apresentada, por décadas, como uma matéria de números e símbolos, ignorando o potencial visual para transformar as experiências dos alunos e desenvolver importantes vias cerebrais.

As novas pesquisas sobre o cérebro que mostram a importância do pensamento visual também incitam mudanças sobre como vemos os estudantes. A matemática escolar valoriza quem memoriza e é rápido no cálculo, mesmo que exemplificar conceitos em imagens seja um ponto fraco. Quando se dá o oposto: os alunos não conseguem memorizar ou usar bem os números, mas produzem fortes ideias e representações visuais, eles geralmente são encaminhados às aulas de reforço. Esse poderia ser o motivo por que alguns de nossos maiores cientistas – Albert Einstein e Thomas Edison, por exemplo – foram desprezados por seus professores e até chamados de “burros”. Einstein dizia que todo o seu pensamento era visual – e que ele teve muitas dificuldades, mais tarde, para transformar suas ideias em palavras e símbolos (WEST, 2004).

Muitos consideram a matemática visual apropriada para crianças pequenas ou para quem tem dificuldades com a matéria. Ela seria, também, uma introdução à parte da

<sup>2</sup> O Common Core (núcleo comum) é uma base que estabelece o conjunto de habilidades que os alunos devem ter a cada série, da pré-escola ao Ensino Médio.

matemática mais abstrata. É verdade que as ideias abstratas podem surgir da matemática visual, ou ser auxiliadas por ela, mas as ideias visuais também podem surgir da matemática abstrata e estendê-la a níveis muito mais complexos. Elas também podem inspirar alunos e professores a ver a matemática de forma diferente, a ver criatividade e beleza nela e a entender propostas mais complexas.

### *Colocando as ideias de pesquisa em prática*

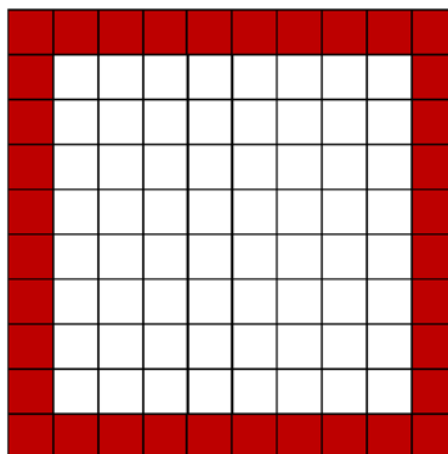
Nos últimos anos, tenho trabalhado com colegas em cursos de reforço de matemática oferecidos durante as férias escolares para alunos do 7º e 8º anos. No verão passado, fizemos um curso de reforço em Stanford, no qual os estudantes tinham 18 aulas de matemática comigo, Cathy Williams, e outros professores. Ao final, eles concluíram que a experiência transformou a forma como viam a matemática e, acima de tudo, como enxergavam o próprio potencial. Quando receberam os testes distritais que precisavam fazer no fim do ano letivo, uma média de 50% deles apresentou melhora nos resultados entre os 81 alunos. Um vídeo do curso pode ser encontrado aqui:

<https://youcubed.org/youcubed-summer-camp-2015>.

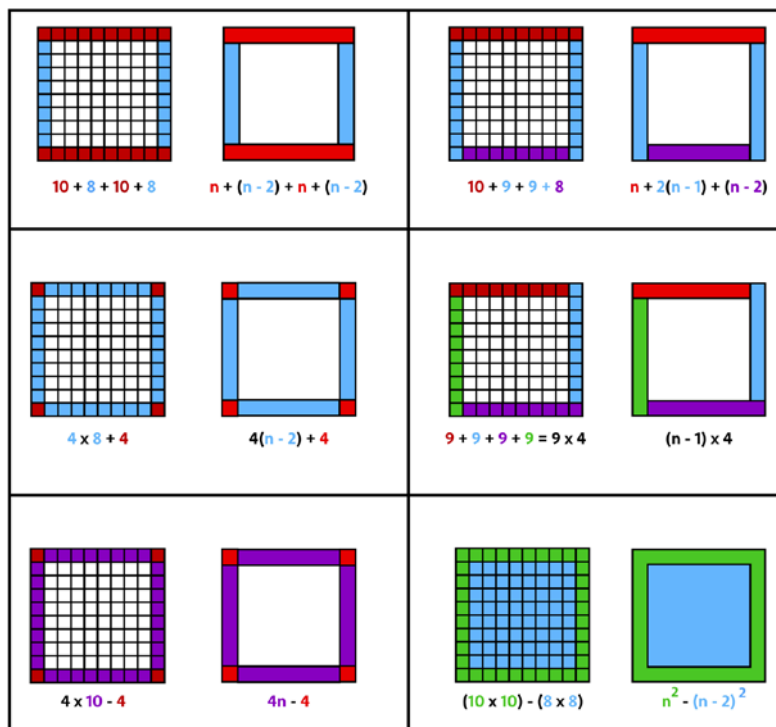
Em nossos cursos, ensinamos a álgebra visual por meio do estudo de padrões e generalizações, explorando os mundos das funções lineares e quadráticas.

Nas aulas de álgebra, as turmas, muitas vezes, têm de manipular símbolos e abordar conceitos matemáticos importantes, como funções, por meio de números e símbolos, sem qualquer compreensão visual. Em nosso curso, abordamos a álgebra com recursos visuais, números e símbolos.

Por exemplo: pedimos que os estudantes olhassem rapidamente para a borda ao redor de um quadrado e descobrissem quantos quadrados havia nela, sem contá-los (veja também, BOALER; HUMPHREYS, 2005):



Eles tentaram chegar na resposta por caminhos diferentes, como mostramos a seguir. Primeiro, as propostas foram descritas numericamente e, depois, algebricamente.



As diferentes maneiras de ver o problema serviram como ponto de partida e recurso para envolver a turma e estimular todos eles a desenvolver diferentes generalizações algébricas, que eles descobriram ser equivalentes. Quando veem padrões crescerem de formas diferentes (BOALER, 2016), eles também ficam fascinados e engajados, e aprendem sobre o pensamento e as transformações funcionais, área importantíssima do currículo norte-americano.

Num exemplo marcante de um aprendizado poderoso da matemática, pedimos aos alunos para analisarem gráficos de tempo-distância, um campo desafiador mesmo para universitários (CLEMENT, 1989). Convidamos os alunos a aprender sobre distância, tempo e velocidade “andando” literalmente sobre a linha do gráfico de tempo-distância, por meio de um sensor que rastreava seus movimentos. Para mais detalhes sobre essa atividade, acesse: <https://www.youcubed.org/category/visual-math/>.

Os alunos impressionaram os visitantes do distrito quando uma garota, que tinha um dos piores aproveitamentos de sua série, deu uma explicação perfeita sobre a elaboração do gráfico de velocidade, desviando de um erro muito comum cometido por milhões de alunos. Quando explicaram o conceito, eles gesticularam com as mãos para expor o movimento, mostrando mais uma vez que seu entendimento era processado nas memórias sensório-motoras. O ensino da velocidade por meio do movimento foi útil para eles e é um ótimo recurso para os professores.



Para engajar os alunos num raciocínio visual produtivo, deve-se perguntar, em intervalos regulares, como *veem* as ideias matemáticas, e, a partir daí, como desenhá-las. O desenho de como pensamos pode ser útil a qualquer nível, inclusive aos matemáticos, para a formulação de ideias e o desenvolvimento de compreensões. Os alunos podem receber atividades com perguntas visuais e oferecer respostas igualmente visuais (exemplos que vão desde a Educação Básica até o universitário podem ser encontrados em **Atividades de Matemática Visual** ou em nossa página do **Youcubed**).

Novos *softwares*, além de jogos e aplicativos de alta qualidade (veja em: <https://www.youcubed.org/category/teaching-ideas/math-apps/>) também são ferramentas poderosas para desenvolver caminhos visuais na mente dos alunos. Os professores também podem sugerir que os estudantes representem ideias de múltiplas formas, como por meio de figuras, modelos, gráficos, e até rabiscos (veja [Vi Hart](#)), ou tirinhas. Em BOALER (2016) há mais ideias para a visualização da matemática, e também em [youcubed.org](https://www.youcubed.org).

No final do curso de férias, uma garota pensou e disse: “Eu nunca tinha *visto* uma ideia matemática”.

Isso parece uma triste acusação ao ensino de matemática nos Estados Unidos. Outro aluno comentou:

“É como o caminho que nossas escolas fizeram conosco, tudo muito preto no branco. Porém, o jeito que as pessoas fazem aqui (no curso de férias) é um tipo bem colorido e bem brilhante. A gente tem um monte de variedades bem diferentes. A gente pode olhar para ele de uma maneira, aí vira o rosto, e de repente vê um cenário bem diferente”.

Quando as salas de aula de matemática se concentram nos números, as diferenças de *status* entre os estudantes costumam surgir, em

Quando o conteúdo é ensinado visualmente, as diferenças de *status* costumam desaparecer.

REALIZADOR



APOIADOR



detrimento da cultura e do aprendizado, e alguns afirmam que o trabalho é “fácil” ou “difícil”, ou falam que “terminaram” depois de fazerem voando uma ficha de atividades. Mas, quando o mesmo conteúdo é ensinado visualmente, nossa experiência nos diz que as diferenças de *status*, que tanto importunam as salas de matemática, desaparecem. Thomas West também ressalta o efeito equalizador do trabalho visual, descrevendo a época em que vários especialistas de disciplinas acadêmicas se reuniram para pensar por meio de recursos visuais, demonstrando respeito uns pelos outros e por suas diferentes ideias, de forma que raramente ocorre quando o trabalho é numérico (WEST, 2014). Parece possível que a matemática visual consiga contribuir para a equidade, para valorizar formas diferentes de raciocínio dos alunos, assim como estimular o profundo engajamento, pois vimos que todos ficaram animados ao *ver* ideias matemáticas, e, a partir disso, eles desenvolveram níveis mais complexos de compreensão e desempenho.

Em nosso trabalho de extensão com distritos escolares, também inspiramos os professores a usar uma matemática visual e aberta. Quando lhes damos experiências visuais de ideias que eles só haviam encontrado antes de forma numérica e abstrata, como em fatos da multiplicação e álgebra, eles ganham conhecimentos sobre conceitos matemáticos que nunca haviam experimentado antes, e começam a adquirir um outro nível de compreensão. Sem contar que eles se sentem empoderados.

Convidar as pessoas a pensar visualmente sobre a matemática é uma experiência libertadora tanto para professores quanto alunos. A matemática é uma matéria multidimensional, e os problemas podem ser resolvidos por caminhos numéricos, visuais ou abstratos. Sabemos que, da mesma forma, nossas redes cerebrais são multidimensionais e precisam ser desenvolvidas e usadas. Acreditamos que os alunos alcançariam uma compreensão matemática mais robusta se nós os ajudássemos a desenvolver suas redes visuais, pois uma rede cerebral plenamente desenvolvida melhoraria a habilidade deles com a matemática.

### **Conclusão: Três recomendações para pais e professores**

As implicações para a sala de aula e para os pais dessa emergente ciência do cérebro mostram que o cerne do pensamento matemático envolve caminhos– e representações com os dedos –, que são importantes e devem ser levadas em consideração.

Aqui estão três recomendações para pais e professores:

**1**

Incentivem, celebrem e comemorem as abordagens visuais dos alunos e desmistifiquem a ideia de que bons alunos de matemática são aqueles que memorizam e calculam bem. Evidências recentes do PISA<sup>3</sup>, exame que envolve milhões de estudantes, mostram que aqueles que abordam a

<sup>3</sup> Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

matemática por meio da memorização têm resultados mais baixos - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE<sup>4</sup>, 2016). Também precisamos derrubar o mito de que um bom desempenho em matemática se baseia em calcular rápido; vários matemáticos estão empenhados em mudar essa ideia, explicando como eles pensam vagarosa e profundamente (veja, por exemplo, Laurent Schwartz, 2001; Keith Devlin). Calcular com velocidade não é solução para resolver problemas de alta complexidade. Bons alunos raciocinam com profundidade, fazem conexões e visualizam. Quando apresento um problema de matemática aos meus alunos de Stanford, digo: “Não ligo para a rapidez, não fico impressionada com quem termina mais rápido; pois isto mostra apenas que o aluno não deve estar raciocinando a fundo. Em vez disso, quero ver representações interessantes e criativas de ideias”. Depois de algumas aulas, os estudantes ampliam suas visões sobre a matemática, e começam a me deixar impressionada com sua criatividade e representações perspicazes, além das novas compreensões que desenvolvem.

**2** Foquem na discriminação, e estimulem o uso dos dedos. Pessoas que se saem bem em matemática têm as representações de seus dedos bem desenvolvidas no cérebro e continuam a usá-las na idade adulta. Essa diferenciação serve até como indicador do quanto uma pessoa vai se sair bem na disciplina. Quando impedimos que os alunos usem os dedos, estamos atrapalhando uma parte importante de seu desenvolvimento matemático. Os professores que não deixam os alunos fazerem isso acham que estão fazendo o melhor e evitando certa infantilização do aprendizado. Mas agora temos o conhecimento que nos habilita a mudar essa ideia, para encorajar os professores a focar no uso e na discriminação dos dedos em sala de aula numa escala muito maior.

**3** É importante ressaltar que o ensino e o aprendizado da matemática precisa ser mais visual – não existe uma única ideia ou conceito matemático que não possa ser ilustrado ou pensado visualmente. Em geral, o Ensino Primário (EF1) é obsessivamente numérico, por ironia mais do que nas séries mais avançadas. As crianças são obrigadas a memorizar fatos e fazer listas de exercícios com poucas representações visuais e criativas. Elas também não são convidadas a trabalhar com representações visuais, geralmente por causa de diretrizes políticas e orientações curriculares falhas.

Quando a maioria dos alunos deixar o Ensino Fundamental, terá desenvolvido pela ideia de que os recursos visuais e materiais manipulativos são coisas de criança, que os dedos nunca devem ser usados e que o sucesso na matemática depende da memorização de métodos numéricos. À medida que vão passando de uma série a outra, eles continuam a trabalhar por caminhos e abordagens excessivamente numéricas e simbólicas.

---

<sup>4</sup> The Organization for Economic Co-operation and Development (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico)

As aulas de álgebra são geralmente compostas pela manipulação de símbolos e a ideia de que os recursos visuais e a manipulação de materiais são só uma introdução à matemática de verdade. Como seria a matemática se ela fosse também visual? Os anexos e nosso arquivo complementar, **Atividades de Matemática Visual**, mostram uma gama de exemplos para diferentes séries.

Alguns acadêmicos destacam que os indivíduos que conseguem desenvolver o raciocínio visual estarão entre os “melhores de sua classe” num novo ambiente de trabalho, o qual recorre a técnicas e tecnologias de visualização de informações nos campos dos negócios, tecnologia, arte e ciência (WEST, 2004, p. 17). Em nosso sistema educacional, é importante não priorizar qualquer “tipo de aluno” em detrimento de outros, ou mesmo passar a ideia de que tomar um método de aprendizado e focar só nele é algo produtivo. A neurociência sabe bem disso – trabalhar com matemática envolve diferentes áreas do cérebro e nós queremos que os alunos desenvolvam habilidades para trabalhar bem com recursos visuais, números, símbolos e palavras. Um dos objetivos deste artigo é apontar que, atualmente, muitas escolas não estão estimulando esse amplo desenvolvimento em matemática, e precisamos, com urgência, expandir as formas como pensamos a disciplina para ensiná-la como uma matéria visual e multidisciplinar, que ela de fato é.

*Jo Boaler* é professora de Educação Matemática na Universidade de Stanford, cofundadora do *Youcubed*, e autora do novo livro *Mathematical Mindsets: Unleashing Students Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching* (Nova York: Willey, 2016).

*Lang Chen* é aluna de pós-doutorado no Departamento de Psiquiatria e Ciência do Comportamento na Universidade de Stanford. Sua pesquisa centra-se no desenvolvimento de representações do conhecimento, atualmente com foco na matemática e linguagem e no cérebro.

*Cathy Williams* é cofundadora e diretora do *Youcubed*.

*Montserrat Cordero* é estudante de graduação do bacharelado em Matemática na Universidade de Stanford, com enfoque interdisciplinar em Pedagogia, membro e fundadora do *Youcubed*.

## Referências

ALIBALI, M. W., & NATHAN, M. J. Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners’ and teachers’ gestures. *Journal of the learning sciences*, v. 21, n. 2, p. 247-286, 2012. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10508406.2011.611446>>.





BATTISTA, C. et al. (manuscrito, não publicado). *Longitudinal development and emergence of specialized functional brain systems supporting cognition in children*.

BERTELETTI, I., & BOOTH, J. R. Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems. *Frontiers in Psychology*, v. 6, n. 226, 2015. Disponível em: <<http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fpsyg.2015.00226/full>>.

BOALER, J.; HUMPHREYS, C. *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Cases of Teaching & Learning*. Portsmouth: Heinemann, 2015.

BOALER, J. (editora convidada, edição especial). The Many Colors of Math: Engaging Students through Collaboration and Agency. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 41, p. 1-234, 2016. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/07323123/41>

BOALER, J. *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Nova York: Jossey-Bass/Wiley, 2016.

BUTTERWORTH, Brian. *The mathematical brain*. Londres: Macmillan, 1999.

CLEMENT, J. The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 11, N. 1-2, p. 77-87, 1989. Disponível em: <[http://people.umass.edu/~clement/pdf/concept\\_of\\_variation.pdf](http://people.umass.edu/~clement/pdf/concept_of_variation.pdf)>.

GARDNER, H. *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books, 2008/2011.

GRACIA-BAFALLUY, M.; NOËL, M. P. Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex*, v. 44, n. 4, p. 368-375, 2008. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18387567>>.

HALL, R.; NEMIROVSKY, R. Introduction to the special issue: Modalities of body engagement in mathematical activity and learning. *Journal of the Learning Sciences*, v. 21, n. 2, 207-215, 2012.



HUBBARD, E. M. et al. Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, v. 6, n. 6, p. 435-448, 2005. Disponível em: <[http://www.unicog.org/publications/HubbardPiazzaPinelDehaene\\_InteractionsNumberSpace\\_NatRevNeurosci2005.pdf](http://www.unicog.org/publications/HubbardPiazzaPinelDehaene_InteractionsNumberSpace_NatRevNeurosci2005.pdf)>.

KUCIAN, K. et al. Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, n. 57, v. 3, p. 782-795, 2011. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21295145>>.

Kumon Connections Newsletter. *News from your Center*, 2014. Disponível em: <<http://tinyurl.com/gng57qx>>.

LADDA, A. M. et al. Effects of combining 2 weeks of passive sensory stimulation with active hand motor training in healthy adults. *PloS one*, v. 9, n. 1, 2014. Disponível em: <<http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0084402>>.

MENON, V. Arithmetic in child and adult brain. In: *Handbook of mathematical cognition*, K. R. Cohen & A. Dowker (orgs.). Oxford University Press, 2014.

NEMIROVSKY, R. et al. When the classroom floor becomes the complex plane: Addition and multiplication as ways of bodily navigation. *Journal of the Learning Sciences*, v. 21, n. 2, p. 287-323, 2012. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10508406.2011.611445>>.

NOËL, M. P. Finger gnosis: a predictor of numerical abilities in children?. *Child Neuropsychology*, v. 11, n. 5, 2005, 2008. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/16306017>>

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). *Learning by Heart May Not be For the Best*, 2016. Disponível em: <<http://oecdeducationtoday.blogspot.fr/2016/03/learning-by-heart-may-not-be-best-for.html>>.

PENNER-WILGER, M.; ANDERSON, M. L. The relation between finger gnosis and mathematical ability: why redeployment of neural circuits best explains the finding. *Frontiers in Psychology*, v. 4, n. 877, 2013. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3851991/>>.



PENNER-WILGER, M. Symbolic and non-symbolic distance effects in number comparison and ordinality tasks. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue Canadienne De Psychologie Expérimentale*, v. 67, n. 4, p. 281-282, 2013.

PENNER-WILGER, M. et. al. Subitizing, finger gnosis, and the representation of number. *Proceedings of the 31st Annual Cognitive Science Society*, p. 520-525, 2009. Disponível em:<<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.411.8676&rep=rep1&type=pdf>>.

SCHNEIDER, M.; GRABNER, R. H.; PAETSCH, J. Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, v. 101, n. 2, p. 359-372, 2009. Disponível em: <<https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/prof/PSY/PAE/Team/Schneider/SchneiderEtAl2009.pdf>>.

SCHAWRTZ, I. *A Mathematician Grappling with his Century*, Basileia: Birkhäuser, 2001.

SIEGLER, R. S.; & Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*, 75(2), 428-444. doi:10.1111/j.1467-8624.2004.00684.

SIEGLER, R. S.; RAMANI, G. B. *Playing linear numerical board games promotes low - income children's numerical development*. *Developmental science*, v. 1, n. 5, 2008.

SOWELL, E. J. Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 5, p. 498-505, 1989. Disponível em:<[https://www.jstor.org/stable/749423?seq=1#page\\_scan\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/749423?seq=1#page_scan_tab_contents)>.

WEST, Thomas. *Thinking like Einstein: Returning to our visual roots with the emerging revolution in computer information visualization*. New York: Prometheus Books, 2014.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Visualization and the nature of mathematics. In *Visualization in teaching and learning mathematics: A project*. Washington: Mathematical Association of America, 1991.

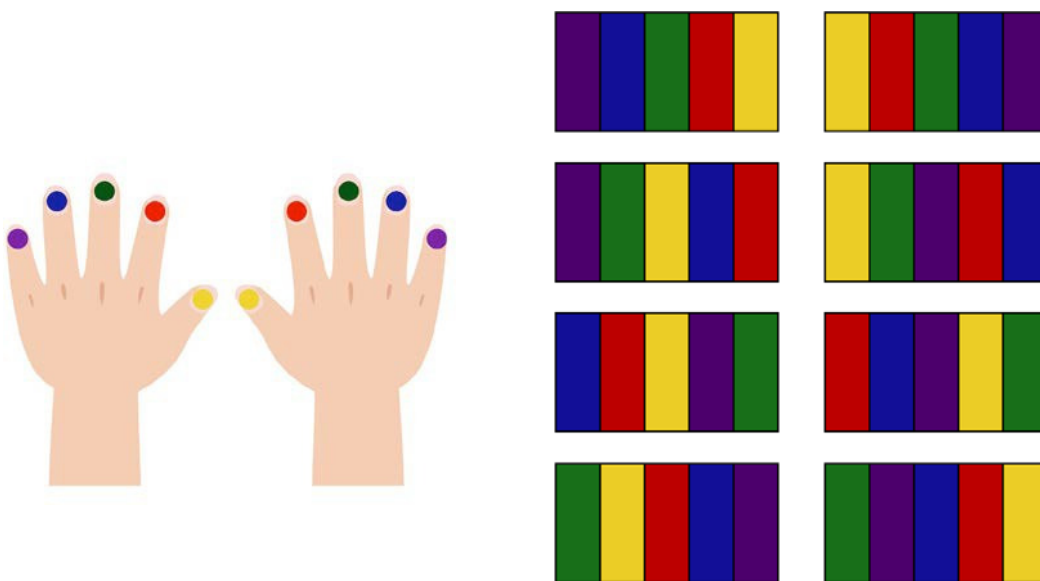


# Anexo

Aqui está uma amostra de atividades e soluções visuais. Para ter acesso à página completa com outros exemplos, acesse: <https://www.youcubed.org/category/visual-math>.

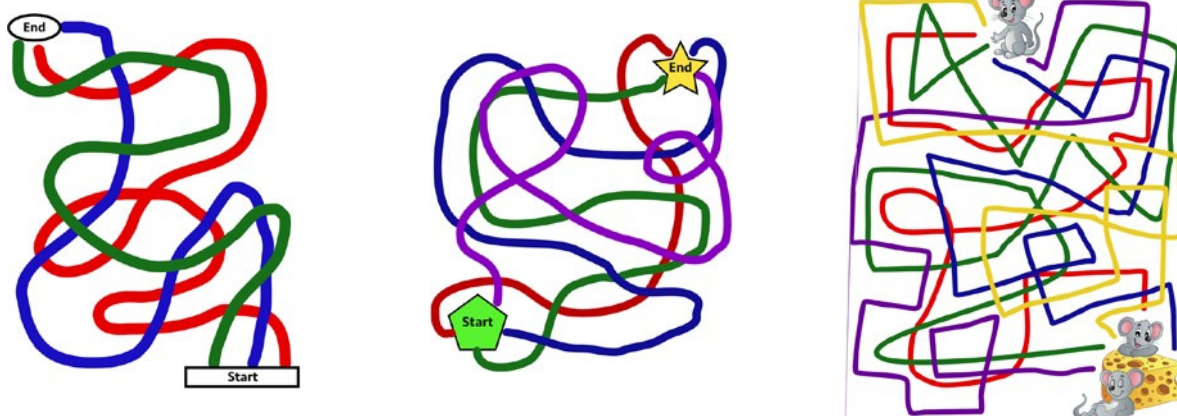
## Arrebentando no piano

Coloque pontinhos coloridos nos dedos de cada aluno e peça para tocarem as teclas correspondentes do piano:



## Labirinto dos dedos

Dê pontinhos coloridos para os alunos colocarem nos dedos e peça que sigam as linhas nos labirintos:

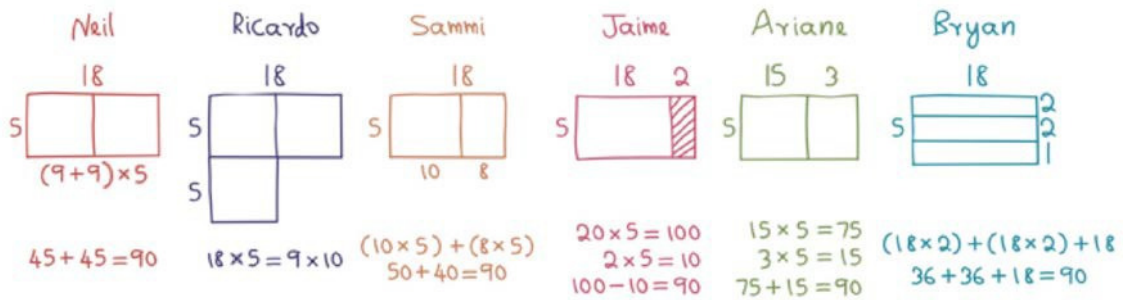


Fonte: Adaptado de Gracia-Bafalluy, M.; NOËL, M. P. (2008). *A prática com os dedos aumenta o desempenho numérico das crianças?*

# Anexo

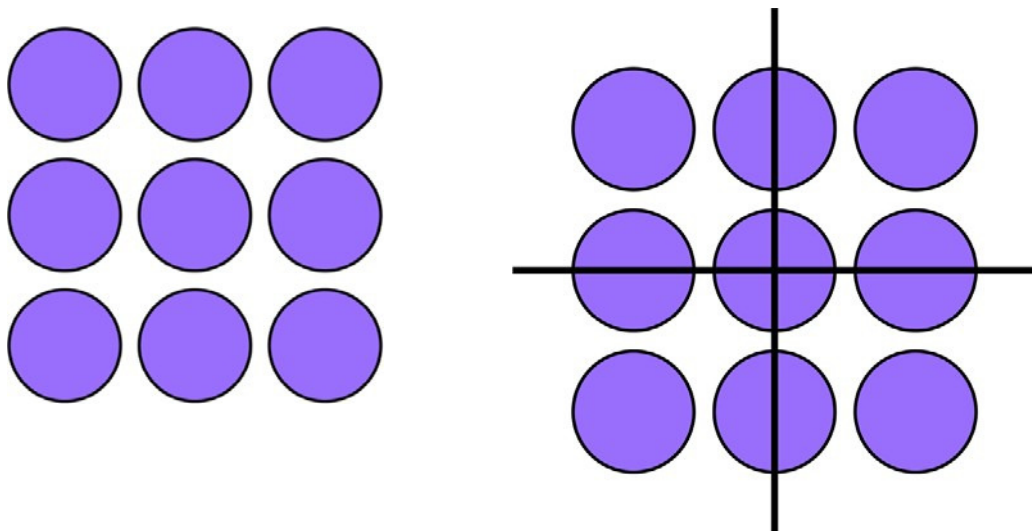
Três surpreendentes soluções visuais. Para ver as atividades completas e outros exemplos, acesse: <<https://www.youcubed.org/category/visual=math/>>.

## 18 x 5



## O problema com as fatias de peito de peru

Um homem está de dieta e entra numa loja para comprar algumas fatias de peito de peru. Ele recebe três fatias, que, juntas, pesam  $\frac{1}{3}$  de 1 quilo, mas sua dieta o orienta a comer apenas  $\frac{1}{4}$  de 1 quilo. Quanto ele pode comer das 3 fatias para seguir a dieta à risca?



De Jo Boaler. *Mathematical Mindsets* (2016)

# Anexo

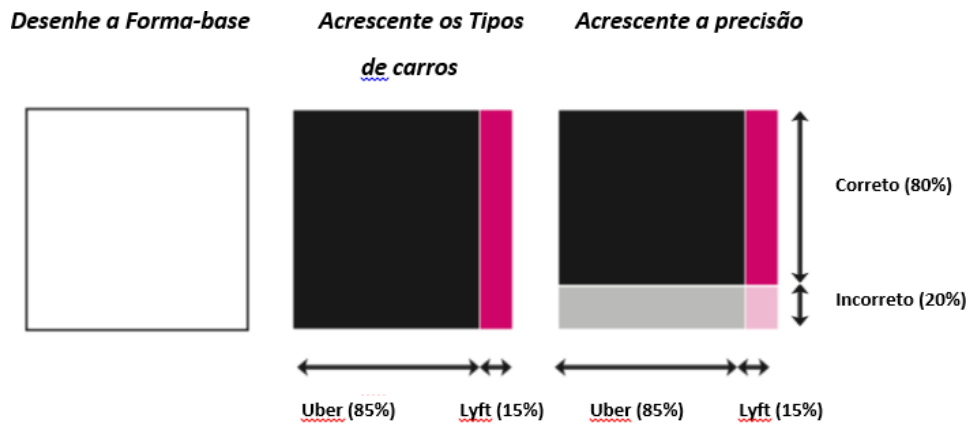
## Uber/Lyft

Na sua cidade, existem duas empresas de transporte individual privado: Uber e Lyft. Seu pai usou um deles para voltar do aeroporto, mas esqueceu o celular no carro!

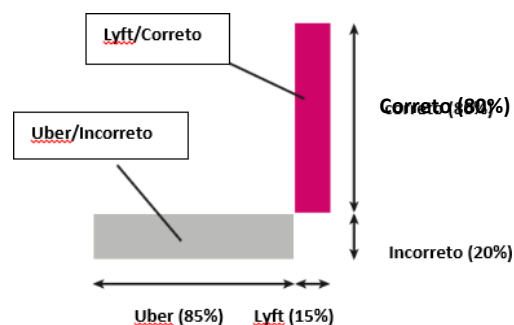
Com isso em mente, observe os seguintes dados:

- 85% dos transportes individuais privados na cidade são Uber e 15%, Lyft.
- Seu pai acha que deixou o celular num carro Lyft, mas não tem certeza. De acordo com sua experiência, ele está correto 80% do tempo e incorreto cerca de 20% do tempo.

Seu pai quer recuperar o aparelho. Diante das informações acima, para qual empresa deve telefonar primeiro? Ou seja, o que é mais provável: que ele tenha deixado o telefone num Uber ou num Lyft?



41%. Então, ele deve ligar para a Uber primeiro



Problema fornecido por Gary Antonick: <<http://wordplay.blogs.nytimes.com/tag/visualthinking>>.